

Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2013-2014

Analisi Matematica Due
quinto appello – 13 gennaio 2015

1. Stabilire per quali valori del parametro reale α la seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1 + n^2 x^2}$$

converge uniformemente nell'intervallo $[-1, 1]$.

2. Determinare i punti critici e i punti di massimo o di minimo relativo su \mathbb{R}^2 per la funzione $f(x, y)$ definita da

$$f(x, y) = (x - \cos y)^4 + y^2 (y - 2)^2 .$$

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x+1}{x}y + x(1-x) .$$

Ci sono varie motivazioni per spiegare la validità dell'uguaglianza per le soluzioni $y = y(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x)}{x} ;$$

giustificare tale uguaglianza mostrando ad esempio che valgono le ipotesi del teorema de L'Hôpital, oppure dimostrarla utilizzando l'espressione analitica dell'equazione differenziale data.

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_C (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy ,$$

dove C è il cerchio di centro nel punto di coordinate $(1, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$.
(Formalmente l'integrale è improprio, ma il calcolo non è influenzato da tale aspetto. Si consiglia di eseguire il conto in coordinate polari $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$).