

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Si consideri la funzione $f : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \in [-1, 0) \cup (0, +1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si chiede (motivando la risposta) se:

- (a) $f(x)$ è continua in $[-1, +1]$;
- (b) $f(x)$ è derivabile in $[-1, +1]$;
- (c) la derivata $f'(x)$ è continua in $[-1, +1]$;
- (d) $f(x)$ è Lipschitziana in $[-1, +1]$.

2. Dato l'integrale definito

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} dx$$

- (a) provare le seguenti disuguaglianze

$$\pi \leq I \leq \pi\sqrt{2}$$

- (b) calcolare l'integrale.

3. Studiare la seguente funzione (insieme di definizione, asintoti, segno della derivata prima, monotonia) e disegnarne il grafico

$$f(x) = \pi x - \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{((x+1)^{\frac{1}{x}} - e)(e^{\sqrt{x}} - \ln(1 + \sqrt{x} + x) - \cos(\sqrt{x}))}{\sin^4(\sqrt{x})}.$$