

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

**Importante:** Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Si consideri la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2e} e^{a_n^2} \\ a_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) Si mostri che l'equazione  $\frac{1}{2e} e^{x^2} = x$  ammette soluzioni in  $\mathbb{R}$  e si indichi il numero di tali soluzioni;
- (b) fissato  $a_1 \in [0, 1]$ , si discuta la monotonia di  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e si determini se  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente;
- (c) (facoltativo): si discuta la monotonia e la convergenza della successioni anche per gli altri valori reali di  $a_1$ .

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_{n+1} = e^{-x_n^2} \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) Si mostri che l'equazione  $e^{-x^2} = x$  ha un'unica soluzione  $X$  in  $\mathbb{R}$ ;
- (b) si discuta la monotonia di  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ;
- (c) si determini se  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente.

3. Si determinino ordine e parte principale di infinitesimo per  $x \rightarrow 0$  della funzione

$$\frac{\log(\log(x+e))}{\tan x} - \frac{1}{e}$$

4. Si calcoli

$$\int_{-1}^1 \log \sqrt{1+x^2} dx,$$

dopo aver preliminarmente discusso l'integrabilità della funzione ed il segno dell'integrale.