Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Si consideri la funzione $f(x)$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} .$$
Stabilire se nel punto $x = 0$ la funzione $f(x)$ risulti continua, derivabile, derivabile due volte. Inoltre disegnare il grafico di $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

2. Determinare il valore del seguente limite
$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\ln(\pi - x)} \cdot \frac{\sin(x^2 - \pi^2)}{\ln x - \ln \pi}.$$

3. Sia $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + e} & x \geq 0 \\ \\ \dfrac{e^{\alpha(x+1)} - 1}{(x+1)^3} & -1 < x < 0. \end{cases}$$
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere l'uniforme continuità di f sui seguenti insiemi:
   (a) $[-\frac{1}{2}, 1]$;
   (b) $[-\frac{1}{2}, +\infty)$;
   (c) $(-1, +\infty)$.

4. Si considerino la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x$ e l' equazione
$$f(x) = c.$$
Mostrare che:
   (a) $\forall c \in \mathbb{R}$ l'equazione ha almeno una soluzione;
   (b) Studiare il numero di soluzioni al variare di c in $[0, 2\pi]$ (sugg.: $2\pi = f(4\pi)$).

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

   Stabilire se nel punto $x = 0$ la funzione $f(x)$ risulti continua, derivabile, derivabile due volte. Inoltre disegnare il grafico di $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

2. Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\ln(\pi - x)} \cdot \frac{1 - \cos(x - \pi)}{e^{(x-\pi)^2} - 1}.$$

3. Sia $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2 + e} & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{e^{\alpha(1-x)} - 1}{(1-x)^3} & 0 < x < 1. \end{cases}$$

   Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere l'uniforme continuità di f sui seguenti insiemi:

   (a) $[-1, \frac{1}{2}]$;
   (b) $(-\infty, \frac{1}{2}]$;
   (c) $(-\infty, 1)$.

4. Si considerino la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sin x$ e l' equazione

$$f(x) = c.$$

   Mostrare che:

   (a) $\forall c \in \mathbb{R}$ l'equazione ha almeno una soluzione;
   (b) Studiare il numero di soluzioni al variare di c in $[0, 2\sqrt{3}\pi]$ (sugg.: $2\sqrt{3}\pi = f(4\pi)$).

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Si consideri la funzione $f(x)$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$
Stabilire se nel punto $x = 0$ la funzione $f(x)$ risulti continua, derivabile, derivabile due volte. Inoltre disegnare il grafico di $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

2. Determinare il valore del seguente limite
$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\ln(\pi - x)}{\ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\ln x - \ln \pi}{\sin(x^2 - \pi^2)}.$$

3. Sia $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} 2x + \sqrt{x^2 + 1} & x \geq 0 \\ \\ \dfrac{e^{\alpha(x+2)} - 2}{(x+2)^3} & -2 < x < 0. \end{cases}$$
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere l'uniforme continuità di f sui seguenti insiemi:
   (a) $[-\frac{1}{2}, 1]$;
   (b) $[-\frac{1}{2}, +\infty)$;
   (c) $(-2, +\infty)$.

4. Si considerino la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x$ e l' equazione
$$f(x) = c.$$
Mostrare che:
   (a) $\forall c \in \mathbb{R}$ l'equazione ha almeno una soluzione;
   (b) Studiare il numero di soluzioni al variare di c in $[0, 2\pi + 1]$ (sugg.: $2\pi + 1 = f(4\pi)$).

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{\frac{x-1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

   Stabilire se nel punto $x = 0$ la funzione $f(x)$ risulti continua, derivabile, derivabile due volte. Inoltre disegnare il grafico di $f(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

2. Determinare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\ln(\pi - x)}{\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{e^{(x-\pi)^2} - 1}{1 - \cos(x - \pi)}.$$

3. Sia $f : (-\infty, 2) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -2x + \sqrt{x^2 + 1} & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{e^{\alpha(2-x)} - 2}{(2-x)^3} & 0 < x < 2. \end{cases}$$

   Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere l'uniforme continuità di f sui seguenti insiemi:

   (a) $[-1, \frac{1}{2}]$;

   (b) $(-\infty, \frac{1}{2}]$;

   (c) $(-\infty, 2)$.

4. Si considerino la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$ e l' equazione

$$f(x) = c.$$

   Mostrare che:

   (a) $\forall c \in \mathbb{R}$ l'equazione ha almeno una soluzione;

   (b) Studiare il numero di soluzioni al variare di c in $[0, 2\sqrt{3}\pi + 1]$ (sugg.: $2\sqrt{3}\pi + 1 = f(4\pi)$).