Dispense del Corso di Analisi III
Corso di Laurea Triennale in Matematica
Università di Firenze

Prof. Rolando Magnanini

DIMAI – Dipartimento di Matematica e Informatica "U. Dini", Università di Firenze, viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze

E-mail address: magnanin@math.unifi.it

Indice

Complementi

1.1. Limite inferiore e limite superiore

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica. Si definiscono allora il *limite inferiore e superiore* , rispettivamente con

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} a_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} a_n.$$

A volte si usano i simboli $\lim'$ o $\underline{\lim}$ per il limite inferiore e $\lim''$ o $\overline{\lim}$ per il limite superiore. Si osservi che le successioni

$$b_k = \inf_{n\geq k} a_n \quad \text{e} \quad c_k = \sup_{n\geq k} a_n$$

sono una crescente e l'altra decrescente, per cui si può scrivere:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n.$$

Esempio 1.1.1. (i) Se $a_n = (-1)^n$, allora $b_k = -1$ e $c_k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi $\liminf a_n = -1$ e $\limsup a_n = 1$.

(ii) Se $a_n = (-1)^n/n$, osserviamo che $b_{2k+1} = -1/(2k+1)$ e $c_{2k} = 1/(2k)$ e quindi $\liminf a_n = \lim b_k = \lim b_{2k+1} = 0$ e $\limsup a_n = \lim c_k = \lim c_{2k} = 0$.

Proposizione 1.1.2 (Caratterizzazione nel caso finito)**.** *Sia $L \in \mathbb{R}$; allora*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = L$$

se e solo se si verifica che

(i) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $a_n \leq L + \varepsilon$ per ogni $n \geq N$;*

(ii) *per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k > k$ tale che $a_{n_k} \geq L - \varepsilon$.*

Analogamente
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = L$$
se e solo se si verifica che

(i) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* N *tale che* $a_n \geq L - \varepsilon$ *per ogni* $n \geq N$;

(ii) *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *esiste* $n_k > k$ *tale che* $a_{n_k} \leq L + \varepsilon$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $c_N < L + \varepsilon$ e quindi $a_n < L + \varepsilon$ per ogni $n \geq N$. Inoltre $L - \varepsilon < L \leq c_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k > k$ tale che $a_{n_k} \geq L - \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $a_n \leq L + \varepsilon$ per ogni $n \geq N$ risulta che $c_N \leq L + \varepsilon$. Inoltre, se per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k > k$ tale che $a_{n_k} \geq L - \varepsilon$, si avrà che $c_k \geq a_{n_k} \geq L - \varepsilon$ e quindi, se $k \geq N$, avremo $L - \varepsilon \leq c_k \leq c_N \leq L + \varepsilon$, cioè la tesi. □

Proposizione 1.1.3. *Risulta che* $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

Inoltre, $\liminf a_n = \limsup a_n = L$ *se e solo se* $\lim a_n = L$.

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia. Dimostriamo la seconda.

($\Rightarrow$) Se $\liminf a_n = +\infty$, allora $b_k \to +\infty$ se $k \to +\infty$ e quindi, per ogni M, esiste N tale che $a_k \geq b_k > M$ per ogni $k > N$ e perciò $\lim a_n = +\infty$. Si procede analogamente se $\limsup a_n = -\infty$.

Se invece $\liminf a_n = \limsup a_n = L$, dalla proposizione precedente, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono N_1 ed N_2 tali che $a_n \leq L + \varepsilon$ per ogni $n \geq N_1$ e $a_n \geq L - \varepsilon$ per ogni $n \geq N_2$. Posto $N = \max(N_1, N_2)$, se $n \geq N$, avremo $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$ se $n \geq N$; dunque $L - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq L + \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε si conclude. □

Proposizione 1.1.4. *Ogni successione ha una sottosuccessione che converge al limite superiore (o inferiore).*

Dimostrazione. Per ogni sottosuccessione $\{a_{n_j}\}$ di $\{a_n\}$, si ha
$$\limsup a_{n_j} \leq \limsup a_n.$$
D'altra parte, scelto $\varepsilon = 1$, esiste $n_1 > 1$ tale che $a_{n_1} > \limsup a_n - 1$; scelto $\varepsilon = 1/2$, esiste $n_2 > n_1$ tale che $a_{n_2} > \limsup a_n - 1/2$, e così via; esiste quindi una successione di indici $n_1 < n_2 < \cdot < n_k < \cdots$ tali che $a_{n_k} > \limsup a_n - 1/k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Perciò $\liminf a_{n_k} \geq \limsup a_n$. □

Concludiamo questo paragrafo con alcune definizioni. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A.
$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{\substack{x\in A \\ 0<|x-x_0|<\delta}} f(x),$$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{\substack{x \in A \\ 0<|x-x_0|<\delta}} f(x).$$

Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi in $\mathbb{R}^N$. Si definiscono

$$E' = \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k,$$

$$E'' = \limsup_{n\to\infty} I_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_n.$$

Se $E' = E''$ si dice che la successione $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1.2. Cardinalità e insiemi numerabili

Il concetto fondamentale per introdurre la cardinalità è quello di corrispondenza biunivoca, cioè di applicazione $f : A \to B$ iniettiva e suriettiva.

Due insiemi A e B sono *equipotenti* (oppure si dice che hanno la *stessa cardinalità*) se esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B. In tal caso si scrive

$$C(A) = C(B).$$

La relazione di equipotenza è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva) e la cardinalità di un insieme può essere pensata come la classe di equivalenza alla quale esso appartiene.

Un caso particolarmente semplice è costituito dagli insiemi finiti per i quali la cardinalità coincide con il numero di elementi dell'insieme.

Un insieme è *finito* se è equipotente a $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. L'intero n è allora la cardinalità dell'insieme.

Osservazione 1.2.1. (i) Gli insiemi finiti non sono equipotenti a nessun loro sottoinsieme proprio, cioè se A è finito e $B \subset A$ allora $C(B) < C(A)$.
(ii) L'insieme delle parti di un insieme di cardinalità n ha cardinalità 2^n.

Un insieme A si dice *infinito* se non esiste alcun n tale che A sia equipotente a I_n.

L'esempio più semplice di insieme infinito è $\mathbb{N}$. Infatti, se esso fosse finito e $B \subset \mathbb{N}$, allora $C(B) < C(\mathbb{N})$, cioè non esisterebbe alcuna $f : B \to \mathbb{N}$ biunivoca. Invece l'insieme $2\mathbb{N}$ dei numeri pari è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ e $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ tale che $f(n) = 2n$ è biunivoca.

Un insieme si dice *numerabile* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Si dice che un insieme è *al più numerabile* se è numerabile o finito.

Osservazione 1.2.2. (i) Ogni sottoinsieme B di un insieme numerabile A è al più numerabile (B non è altro che una successione estratta da A).

(ii) L'unione numerabile di insiemi finiti è numerabile.

Infatti, se $A_1, \dots, A_n, \dots$ sono finiti, possiamo definire tra la loro unione e $\mathbb{N}$ la corrispondenza biunivoca $A_1 \leftrightarrow \{1, \cdots, n_1\}$, $A_2 \leftrightarrow \{n_1 + 1, \cdots, n_1 + n_2\}, \cdots$.

Esempio 1.2.3. $\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile.

È chiaro che basta dimostrare che l'insieme dei razionali positivi è numerabile.

(i) Ogni numero razionale positivo r si può scrivere nella forma $r = \frac{m}{n}$ con m e n interi primi tra loro. Definiamo l'altezza di r, con $h(r) = m + n$. Per ogni k naturale esistono al più $k - 1$ razionali con altezza k, quindi l'insieme dei numeri razionali positivi è unione numerabile di insiemi finiti.

(ii) Un'altra dimostrazione è quella illustrata in figura.

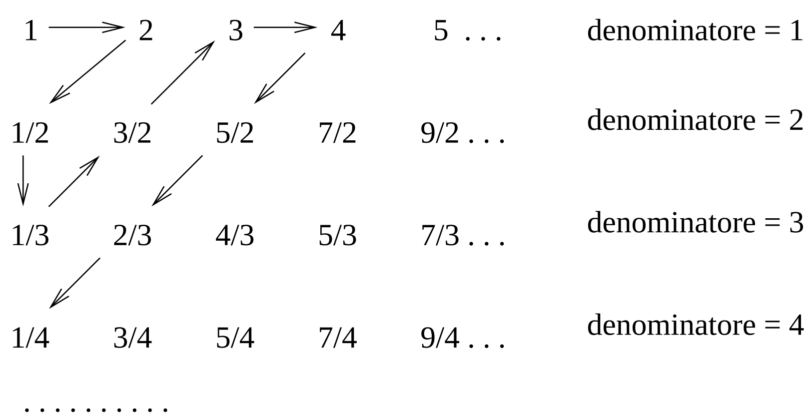

Figura 1. Processo di diagonalizzazione.

Proposizione 1.2.4. *Se A è un insieme numerabile, l'insieme S_A delle successioni finite di elementi di A è numerabile.*

Dimostrazione. Sia $A = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$; allora $S_A = \{(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}),\ k \in \mathbb{N},\ a_{j_i} \in A\}$.

Sia $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ la successione dei numeri primi. Associamo l'intero $p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}$ ad ogni $(a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) \in S_A$. Tale corrispondenza è biunivoca. $\square$

Corollario 1.2.5. *Le coppie ordinate di numeri naturali sono un insieme numerabile. Quindi $\mathbb{Q}$ è numerabile.*

Proposizione 1.2.6. *L'unione di una infinità numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*

Dimostrazione. Si usa il processo di diagonalizzazione sulla lista:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots\}, \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n}, \ldots\}, \end{aligned}$$

(si contano prima gli elementi a_{ij} con i+j=2, poi quelli con $i + j = 3$ e cosìvia). $\square$

Esempio 1.2.7 (Cantor)**.** Gli insiemi infiniti non sono tutti numerabili: per esempio l'intervallo $(0, 1)$ non è numerabile.

Infatti, se fosse numerabile si potrebbero elencare i suoi elementi, scrivendoli in forma decimale:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \end{aligned}$$

dove gli a_{ij} sono numeri interi compresi tra 0 e 9. Il numero $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$ con $a_j = 1$ se a_{jj} è pari e $a_j = 2$ se a_{jj} è dispari, non è compreso nella successione perché è diverso da tutti quelli elencati.

Si dice che $(0, 1)$ ha la *potenza del continuo.*

Osservazione 1.2.8. Anche $\mathbb{R}$ e $(0, 1)^N$ hanno la potenza del continuo.

Esistono insiemi con cardinalità ancora maggiore ($C(A) \leq C(B)$ se esiste una applicazione $f : A \to B$ iniettiva).

Proposizione 1.2.9. *Sia $P(X)$ l'insieme delle parti di X. Allora*

$$C(X) < C(P(X)).$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che esiste una applicazione $f : X \to P(X)$ iniettiva, ma non ne esiste una $g : P(X) \to X$ biunivoca.

La costruzione di f è banale basta prendere $f : x \mapsto \{x\}$.

Supponiamo che esista g. Sia $A = \{x \in X : x \notin g^{-1}(x)\}$. Siccome $A \in P(X)$, sia $a = g(A)$. Se $a \in A$, allora $a \notin g^{-1}(a) = A$, che è assurdo. Lo stesso, se $a \notin A = g^{-1}(a)$, allora $a \in A$ che è ancora assurdo. $\square$

1.3. Decomposizioni di aperti di $\mathbb{R}^N$

Useremo le seguenti notazioni: per $x \in \mathbb{R}^N$ ed $r > 0$ poniamo

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < r\},$$
$$Q(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y_i - x_i| < r,\ i = 1, \ldots, N\}.$$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$; un punto $x \in E$ si dice *interno* se esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq E$ (oppure $Q(x,r) \subseteq E$). Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è *aperto* se ogni suo punto è interno. Un insieme si dice *chiuso* se è il complementare di un aperto. Indichiamo con $\mathring{E}$ l'*interno di* E e cioè l'insieme dei punti interni di E; è chiaro che E è aperto se e solo se $E = \mathring{E}$

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *compatto* se da ogni ricoprimento di K si può estrarre un sotto-ricoprimento finito di K.

Teorema 1.3.1 (Cantor)**.** *Ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di $\mathbb{R}$. Preso $x \in A$, sia A_x l'unione di tutti gli intervalli aperti contenenti x e contenuti in A. Per costruzione A_x è un intervallo.

Se x e y sono due punti distinti di A allora o $A_x = A_y$ o $A_x \cap A_y = \varnothing$ Infatti se $A_x \cap A_y \neq \varnothing$ allora $A_x \cup A_y$ è un intervallo contenuto in A e contenente sia x che y.

Poiché A_x è un intervallo, allora contiene almeno un razionale e quindi gli intervalli A_x che sono distinti (e quindi disgiunti) sono al più un'infinità numerabile e la loro unione è uguale A. $\square$

Un insieme aperto di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, in generale, non può essere decomposto in un'unione numerabile di cubi aperti a due a due disgiunti; il Teorema 1.3.2 dimostra che esso può essere però decomposto in un'unione numerabile di cubi chiusi con interni a due a due disgiunti.

Premettiamo alcune notazioni. Fissati $n \in \mathbb{N}$ ed $m = (m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$, poniamo:

$$Q_{m,n} = \{x \in \mathbb{R}^N : (m_i - 1)2^{-n} \leq x, \leq m_i 2^{-n}, i = 1, \ldots, N\}$$
$$\mathcal{Q}_n = \{Q_{m,n} : m \in \mathbb{Z}^N\},$$

È chiaro che

(i) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^N = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}^N} Q_{m,n}$;

(ii) $\mathring{Q}_{m,n} \cap \mathring{Q}_{m',n} = \varnothing$ se $m \neq m', n \in \mathbb{N}$.

Infine, un insieme P si dirà un *plurintervallo* se è l'unione finita di cubi chiusi.

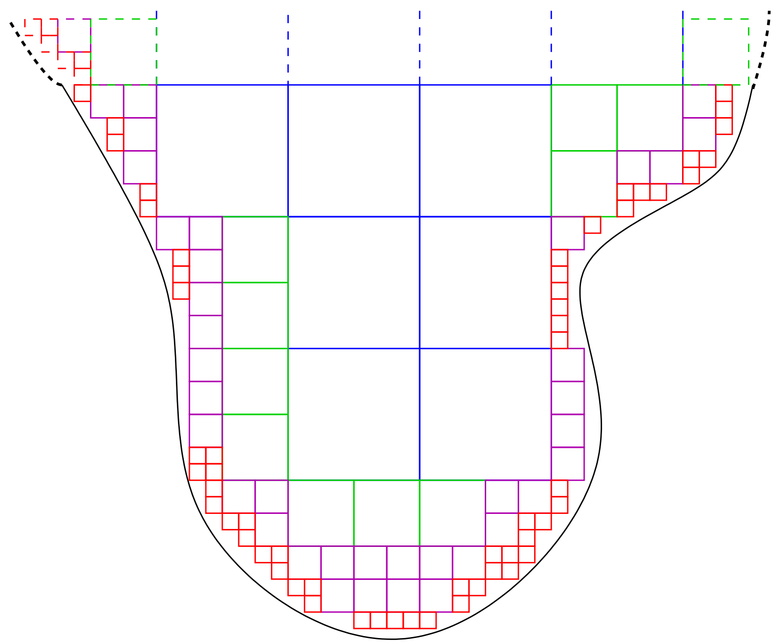

Figura 2. Decomposizione diadica di un aperto.

Teorema 1.3.2 (Decomposizione diadica di un aperto di $\mathbb{R}^N$)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora A è unione di un'infinità numerabile di intervalli chiusi a due a due privi di punti interni in comune. Inoltre tali intervalli si possono scegliere tutti con diametro più piccolo di qualsiasi numero prefissato.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ e scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $2^{-n}\sqrt{N} < \varepsilon$. L'aperto A contiene al più un'infinità numerabile di cubi di $\mathcal{Q}_n$; indichiamo con B_1 la loro unione. Ogni $x \in A \setminus B_1$ ha distanza da ∂A che non supera $2^{-n}\sqrt{N}$.

C'è allora un'infinità al più numerabile di cubi di $\mathcal{Q}_{n+1}$ contenuti in $A \setminus \mathring{B}_1$, la cui unione indichiamo con B_2. Ogni $x \in A \setminus (B_1 \cup B_2)$ ha distanza da ∂A che non supera $2^{-(n+1)}\sqrt{N}$. Iterando questo ragionamento, possiamo dire che esiste al più un'infinità numerabile di cubi di $\mathcal{Q}_{n+k}$ contenuti nell'interno del complementare di $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato. Ogni $x \in A \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} B_i)$ ha distanza da ∂A che non supera $2^{-(n+k-1)}\sqrt{N}$. L'unione $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ consiste allora di un'infinità numerabile di cubi a due a due privi di punti interni in comune ed è chiaro che essa è contenuta in A.

D'altra parte, fissato $x \in A$, $2^{-(n+k_x-1)}\sqrt{N} < \operatorname{dist}(x, \partial A)$ per qualche

$k_x \in \mathbb{N}$ e quindi

$$x \in \bigcup_{i=0}^{k_x} B_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i.$$

□

Corollario 1.3.3. *(i) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora esiste una successione crescente di plurintervalli P_n tale che*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = A.$$

(ii) Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto. Allora esiste una successione decrescente di plurintervalli Q_n tale che

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathring{Q}_n = K.$$

Dimostrazione. (i) Basterà prendere come P_n l'unione di tutti i cubi in $\bigcup_{i=0}^{n} B_i$ contenuti nel cubo $Q(0,n)$. Ciò garantisce che i cubi scelti siano in numero finito e che $P_n \subseteq P_{n+1}$.

(ii) Sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $K \subset Q(0,\nu)$; $Q(0,\nu) \setminus K$ è aperto, esiste allora una successione crescente in P_n tale che

$$Q(0,\nu) \setminus K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$$

Basterà allora scegliere $Q_n = \overline{Q(0,\nu) \setminus P_n}$. □

1.4. Alcuni risultati sulle funzioni convesse

Siano $-\infty \le a < b \le +\infty$. Una funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* in $[a,b]$ se, per ogni t_0 ed $t_1 \in [a,b]$, risulta

$$\varphi((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1) \le (1-\lambda)\,\varphi(t_0) + \lambda\,\varphi(t_1) \quad \text{per ogni} \quad \lambda \in [0,1]. \tag{1.1}$$

È chiaro che φ è convessa se e solo se è convesso l'insieme:

$$\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a,b], s > \varphi(t)\}.$$

Inoltre, si dirà che φ è *concava* se $-\varphi$ è convessa.

Proposizione 1.4.1. *Siano $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$, funzioni convesse in $[a,b]$.*

Allora

- *(i) se $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$, sono numeri non negativi, la funzione $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\varphi_n$ è convessa in $[a,b]$;*
- *(ii) se φ_n converge in $[a,b]$ ad una funzione φ, questa risulta convessa in $[a,b]$.*

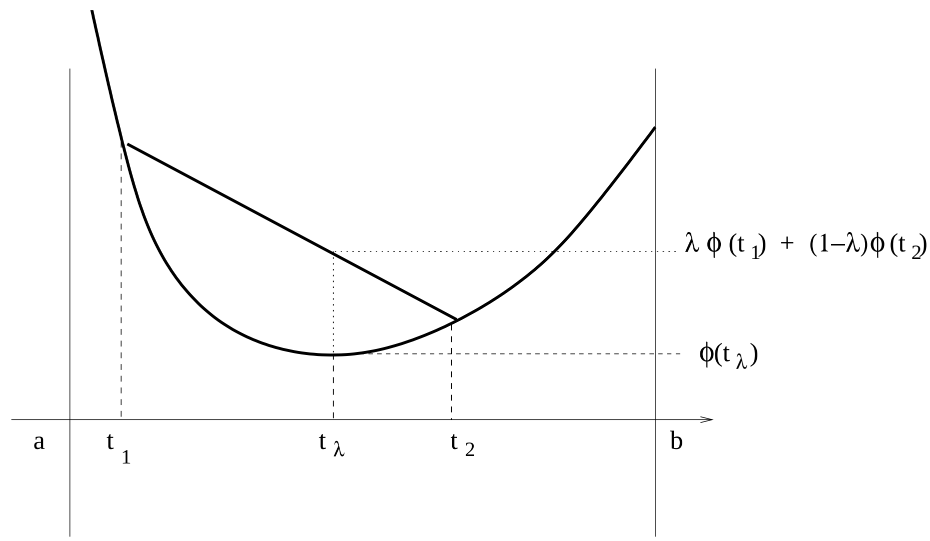

Figura 3. Funzione convessa; $t_\lambda = (1-\lambda)t_0 + \lambda t_1$.

Dimostrazione. Fissati t_0 ed $t_1 \in [a,b]$, risulta:

$$\varphi_n((1-\lambda)t_0 + \lambda t_1) \leq (1-\lambda)\,\varphi_n(t_0) + \lambda\,\varphi_n(t_1),$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. La conclusione (i) si ottiene moltiplicando per $\alpha_n \geq 0$ e poi sommando su $n \in \mathbb{N}$. La (ii) segue invece semplicemente passando al limite sia a destra che a sinistra nella disuguaglianza. $\square$

Proposizione 1.4.2. *Sia* $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ *una famiglia di funzioni convesse in* $[a,b]$. *Allora la funzione* φ *definita da*

$$\varphi(t) = \sup_{i\in I} \varphi_i(t), \;\; t \in [a,b],$$

è convessa in $[a,b]$.

Dimostrazione. Siano $t_0, t_1 \in [a,b]$ e $\lambda \in (0,1)$.

Se il valore $\varphi((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1)$ è finito, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $i \in I$ tale che

$$\varphi((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1) \;<\; \varphi_i((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1) + \varepsilon \leq \\ (1-\lambda)\,\varphi_i(t_0) + \lambda\,\varphi_i(t_1) + \varepsilon \leq (1-\lambda)\,\varphi(t_0) + \lambda\,\varphi(t_1) + \varepsilon,$$

e quindi si conclude per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Se $\varphi((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1) = +\infty$, fissato n esiste $i \in I$ tale che

$$n < \varphi_i((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1) \leq (1-\lambda)\,\varphi_i(t_0) + \lambda\,\varphi_i(t_1)$$

e quindi anche $(1-\lambda)\,\varphi(t_0) + \lambda\,\varphi(t_1) = +\infty$. $\square$

Teorema 1.4.3. *Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa in $[a,b]$.*

Allora la funzione ψ definita da

$$\psi(t,s) = \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \tag{1.2}$$

per ogni $t, s \in [a,b]$ con $t \neq s$, è crescente rispetto a ciascuna variabile.

Dimostrazione. Si noti che $\psi(s,t) = \psi(t,s)$ per ogni $t, s \in [a,b]$ con $t \neq s$; basta quindi dimostrare la monotonia rispetto ad una delle due variabili.

Siano $t < s$ e $\lambda \in (0,1)$; risulta:

$$\varphi(\lambda\, t + (1-\lambda)\, s) \leq \lambda\, \varphi(t) + (1-\lambda)\, \varphi(s) = \varphi(t) + (1-\lambda)[\varphi(s) - \varphi(t)]$$

e quindi

$$\frac{\varphi(\lambda\, t + (1-\lambda)\, s) - \varphi(t)}{(1-\lambda)(s-t)} \leq \frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} = \psi(t,s).$$

Se $t < u < s$, esiste $\lambda \in (0,1)$ tale che $u = \lambda t + (1-\lambda)s$, e quindi

$$\psi(t,u) \leq \psi(t,s).$$

Perciò ψ cresce per ogni t fissato. □

Teorema 1.4.4. *Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa. Allora:*

(i) per ogni $t \in (a,b)$ esistono finiti i numeri

$$\varphi'(t^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}, \ \ \varphi'(t^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h};$$

(ii) φ è continua in (a,b);

(iii) $\varphi'(t^-) \leq \varphi'(t^+)$ per ogni $t \in (a,b)$;

(iv) la derivata φ' esiste eccettuata al più un'infinità numerabile di punti ed inoltre φ' è crescente.

Dimostrazione. (i) Fissiamo $h > 0$ ed α, β, s e t in modo che $a < \alpha < t < t + h < s - h < s < \beta < b$; per il Teorema 1.4.3 si ha:

$$\psi(\alpha,t) \leq \psi(t+h,t) \leq \psi(t+h,s) \leq \psi(s-h,s) \leq \psi(s,\beta)$$

e quindi

$$\psi(\alpha,t) \leq \varphi'(t^+) = \lim_{h \to 0^+} \psi(t+h,t) \leq \lim_{h \to 0^+} \psi(s,s-h) = \varphi'(s^-) \leq \psi(s,\beta).$$

Perciò vale la (i) e risulta che

$$\varphi'(t^+) \leq \varphi'(s^-) \ \text{ se } \ t < s. \tag{1.3}$$

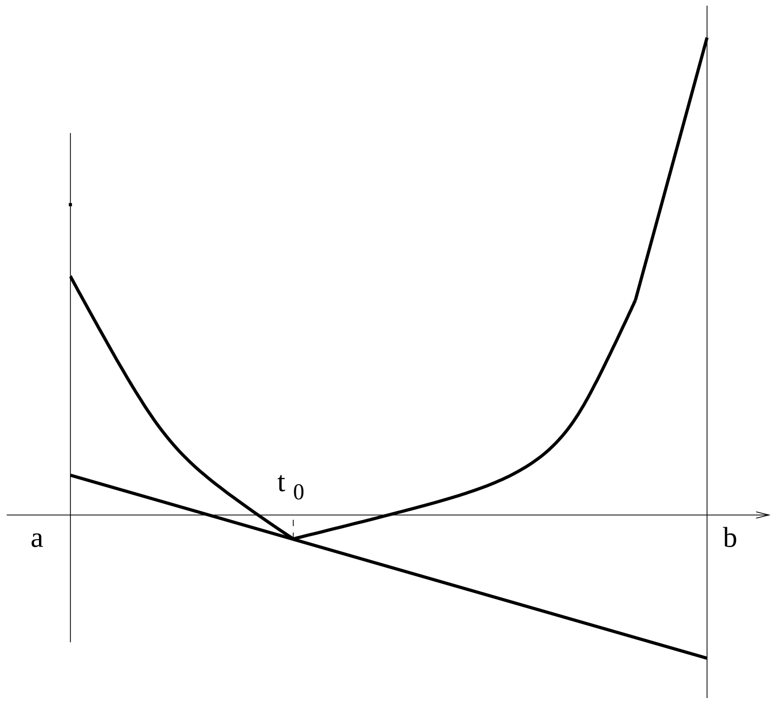

Figura 4. Retta di supporto in t_0.

(ii) Per ogni $t \in (a, b)$ risulta:

$$\lim_{s \to t^\pm} [\varphi(s) - \varphi(t)] = \varphi'(t^\pm) \lim_{s \to t^\pm} (s - t) = 0,$$

dato che $\varphi'(t^\pm)$ è finito per la (i).

(iii) Se $h > 0$ è tale che $a < t - h < t < t + h < b$, si ha che

$$\psi(t - h, t) \leq \psi(t - h, t + h) \leq \psi(t, t + h)$$

e quindi, facendo tendere h a zero, si ottiene che $\varphi'(t^-) \leq \varphi'(t^+)$.

(iv) Sia $I = \{t \in (a, b) : \varphi'(t^-) < \varphi'(t^+)\}$. Per ogni $t \in I$, scegliamo un solo numero razionale nell'intervallo $(\varphi'(t^-), \varphi'(t^+))$; abbiamo così definito un'applicazione dall'insieme I a $\mathbb{Q}$. Quest'applicazione è iniettiva, perchè ogni volta che $t, s \in I$ e $t \neq s$, gli intervalli $(\varphi'(t^-), \varphi'(t^+))$ e $(\varphi'(s^-), \varphi'(s^+))$ sono disgiunti per la (1.3). Ciò implica che I è numerabile. Inoltre, se $t \notin I$, la (1.3) implica che φ' cresce. □

Corollario 1.4.5. *Se φ è convessa in $[a, b]$, allora per ogni $t \in (a, b)$ esiste $p_t \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + p_t(s - t),$$

per ogni $s \in [a, b]$.

Dimostrazione. Sia $p_t \in [\varphi'(t^-), \varphi'(t^+)]$. Allora, se $s > t$, si ha:

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} \geq \varphi'(t^+) \geq p_t,$$

mentre se $s < t$

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} \leq \varphi'(t^-) \leq p_t,$$

per la (1.3). In ogni caso, vale la tesi del corollario. □

Una retta $s = \varphi(t_0) + p_{t_0}(t - t_0)$ tale che

$$\varphi(t) \geq \varphi(t_0) + p_{t_0}(t - t_0)$$

per ogni $t \in [a, b]$ si dice una *retta di supporto* per φ in t_0.

1.5. Estensioni di funzioni continue

Sia f una funzione continua definita su un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}$. Il *modulo di continuità* di f in E è la funzione crescente $\omega_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ definita da

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x,y \in E}} |f(x) - f(y)|, \quad \delta > 0. \tag{1.4}$$

La funzione f è uniformemente continua su E se e solo se $\omega(f, \delta) \to 0$ per $\delta \to 0$.

Supponiamo che esistano due numeri positivi a, b tali che

$$\omega(f, \delta) \leq a\delta + b \quad \text{per ogni} \quad \delta > 0.\text{[1]} \tag{1.5}$$

Possiamo allora definire il *modulo concavo di continuità* di f in E come la funzione $c_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ tale che

$$c_f(\delta) = \inf\{a\delta + b : as + b \geq \omega(f, s) \text{ per ogni } s > 0\}.$$

Teorema 1.5.1 (Pucci). *Sia f uniformemente continua su un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ con modulo di continuità $\omega(f, \delta)$ soddisfacente* (1.5).

Esiste un funzione f^* continua su $\mathbb{R}^N$ tale che

(i) $f^* = f$ *in* E;

(ii) $\sup_{\mathbb{R}^N} f^* = \sup_E f, \quad \inf_{\mathbb{R}^N} f^* = \inf_E f$;

(iii) $c_{f^*} = c_f$.

[1] Si osservi che, se E è limitato ed f è continua in E, allora (1.5) è sicuramente soddisfatta.

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo:

$$g(x) = \inf_{y \in E} \{f(y) + c_f(|x-y|)\} \quad \text{e} \quad f^*(x) = \min[g(x), \sup_E f].$$

(i) Per come c_f è stata definita, $c_f(|x-y|) \geq |f(x) - f(y)|$ e quindi per $x \in E$ si ha:

$$f(y) + c_f(|x-y|) \geq f(y) + |f(x) - f(y)| \geq f(x)$$

per ogni $y \in E$. Perciò $g(x) \geq f(x)$ per $x \in E$ e quindi $g(x) = f(x)$ per $x \in E$, dato anche che $f(x) = f(x) + c_f(|x-x|) \geq g(x)$.

(ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e ogni $y \in E$, risulta che

$$\inf_E f + \inf_{y \in E} c_f(|x-y|) \leq g(x) \leq f(y) + c_f(|x-y|)$$

e quindi

$$\inf_E f = \inf_E g \geq \inf_{\mathbb{R}^N} g \geq \inf_E f + \inf_{\mathbb{R}^N} \inf_{y \in E} c_f(|x-y|) = \inf_E f,$$

ossia $\inf_{\mathbb{R}^N} f^* = \inf_{\mathbb{R}^N} g = \inf_E f$. D'altra parte, è chiaro che $\sup_E f \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f^* \leq \sup_E f$.

(iii) Basta dimostrare che $c_g = c_f$. Fissati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $y \in E$ tale che

$$g(x_1) \geq f(y) + c_f(|x_1 - y|) - \varepsilon$$

e quindi

$$g(x_1) - g(x_2) \geq f(y) + c_f(|x_1 - y|) - c_f(|x_2 - y|) - \varepsilon.$$

Se $|x_2 - y| \leq |x_1 - x_2|$, abbiamo che

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) \quad &\geq \quad c_f(|x_1 - y|) - c_f(|x_2 - y|) - \varepsilon \geq -c_f(|x_2 - y|) - \varepsilon \geq \\ &\quad -c_f(|x_2 - x_1|) - \varepsilon, \end{aligned}$$

dato che $c_f(\delta)$ è crescente.

Altrimenti, $|x_1 - y| > |x_2 - y| - |x_2 - x_1| > 0$. Poiché $c_f(\delta)$ è concava, la funzione ψ del Teorema 1.4.3 relativa a c_f è decrescente nelle due variabili. Perciò :

$$\begin{aligned} &\frac{c_f(|x_1 - y|) - c_f(0)}{|x_1 - y|} = \psi(|x_1 - y|, 0) \geq \psi(|x_1 - y| + |x_2 - x_1|, 0) \geq \\ &\psi(|x_1 - y| + |x_2 - x_1|, |x_2 - x_1|) = \\ &\frac{c_f(|x_1 - y| + |x_2 - x_1|) - c_f(|x_2 - x_1|)}{|x_1 - y|} \geq \frac{c_f(|x_2 - y|) - c_f(|x_2 - x_1|)}{|x_1 - y|}, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue ancora dal fatto che $c_f(\delta)$ cresce.

Poiché $c_f(0) = 0$, concludiamo che

$$c_f(|x_1 - y|) - c_f(|x_2 - y| \geq -c_f(|x_2 - x_1|)$$

e quindi nei due casi esaminati otteniamo

$$g(x_1) - g(x_2) \geq -c_f(|x_2 - x_1|) - \varepsilon.$$

Scambiando il ruolo di x_1 ed x_2 abbiamo infine che

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq c_f(|x_2 - x_1|),$$

tenendo conto che ε è arbitrario. □

Osservazione 1.5.2. È chiaro che $\omega(f,\delta) \to 0$ se $c_f(\delta) \to 0$ per $\delta \to 0^+$, dato che $\omega(f,\delta) \leq c_f(\delta)$.

Viceversa, dato che esistono $\overline{a}$ e b tali che $\omega(f,s) \leq \overline{a}s + \overline{b}$ per ogni $s \geq 0$, per ogni $\delta > 0$ ed $a > \overline{a}$ si ha:

$$c_f(\delta) \leq a\,\delta + \sup_{s \geq 0}\{\omega(f,s) - a\,s\} \leq$$
$$a\,\delta + \sup_{0 \leq s \leq \frac{\overline{b}}{a - \overline{a}}}\{\omega(f,s) - a\,s\} \leq a\,\delta + \omega(f, \overline{b}/(a - \overline{a})).$$

Perciò :

$$\lim_{\delta \to 0^+} c_f(\delta) \leq \omega(f, \overline{b}/(a - \overline{a}))$$

per ogni $a > \overline{a}$ e quindi $\lim\limits_{\delta \to 0^+} c_f(\delta) = 0$.

Esercizi

1. Se $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Vale anche

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \limsup_{n\to\infty} b_n?$$

2. Dimostrare che

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n;$$
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Trovare degli esempi in cui le disuguaglianze valgono in senso stretto.

3. Sia f una funzione continua in $(0,1)$ e tale che

$$\liminf_{x\to 0} f(x) < \limsup_{x\to 0} f(x).$$

Allora per ogni valore $l \in (\liminf_{x\to 0} f(x), \limsup_{x\to 0} f(x))$ esiste una successione x_n in $(0,1)$, convergente a 0 e tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

4. Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi e si definiscano:

$$E' = \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k, \quad E'' = \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

   Provare che $E' \subseteq E''$. Trovare un esempio in cui valga l'inclusione stretta.

5. Con le notazioni dell'esercizio precedente, dimostrare che

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{X}_{E_n} = \mathcal{X}_{E''}.$$

6. Sia

$$E_n = \{x \in [0, 2\pi] : \frac{\sin(nx)}{n} > 0\},\ n \in \mathbb{N}.$$

   Calcolare E' ed E''.

7. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in A$ esiste un $\delta > 0$ per il quale $A \cap (x, x+\delta) = \varnothing$. Dimostrare che A è numerabile.

8. Sia f una funzione crescente in un intervallo aperto non vuoto $I \subset \mathbb{R}$. È noto che i punti di discontinuità di f sono solo di prima specie (salti finiti). Sia allora S l'insieme di tali punti di discontinuità in I. Dimostrare che
   (i) S è al più numerabile;
   (ii) se $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$, allora esiste una funzione crescente f i cui punti di discontinuità sono esattamente quelli di A.

9. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle successioni a valori 0 o 1 e sia $f : \mathcal{S} \to [0, 2]$ la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},\ x = \{x_0, x_1, \dots\} \in \mathcal{S}.$$

   (i) Dimostrare che ogni elemento di $[0, 2]$ ha al più due immagini inverse secondo f;
   (ii) determinare l'insieme D degli elementi di $[0, 2]$ che hanno due immagini inverse;
   (iii) dimostrare che D e $f^{-1}(D)$ sono infiniti e numerabili.

10. Sia I un insieme qualsiasi e sia $f : I \to [0, +\infty)$. Si definisca

$$\sum_{i\in I} f(i) = \sup\Big\{\sum_{i\in J} f(i) : J \subset I, J \text{ finito}\Big\}.$$

   Dimostrare che se $\sum_{i\in I} f(i) < \infty$ allora l'insieme $A = \{i \in I : f(i) \neq 0\}$ è al più numerabile.

11. Sia f continua in $[a,b]$ e tale che, fissati comunque x e y in $[a,b]$, si ha $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Provare che f è convessa. (Si veda *Courant-Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. II,* per un controesempio a questo esercizio, nel caso in cui l'ipotesi di continuità sia rimossa.)
12. Costruire una funzione convessa in un intervallo che sia non derivabile in un'infinità numerabile di punti arbitrariamente scelta nell'intervallo.
13. Dimostrare l'inverso del Corollario 1.4.5: se ogni punto del grafico di φ ammette una retta di supporto, allora φ è convessa.
14. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Dimostrare che la funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da
$$\varphi(t) = \int_a^t f(s)\, ds, \quad t \in [a,b],$$
è convessa.
15. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e sia $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Dimostrare che la funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da
$$\varphi(t) = \int_a^b f(|t-s|)\, ds, \quad t \in [a,b],$$
è convessa.
16. Sia f convessa in $(0,+\infty)$; provare che esiste $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Capitolo 2

La misura di Lebesgue

2.1. Misura di aperti

Se $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ è un intervallo, poniamo

$$m(I) = m(\mathring{I}) = \text{ misura di } I = (b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N).$$

Se P è un plurintervallo allora si potrà scrivere che $P = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ dove $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_k = \varnothing$ per $j \neq k$. Si definisce allora

$$m(P) = m(\mathring{P}) = \sum_{j=1}^{n} m(I_j).$$

È chiaro che questa definizione non dipende dalla particolare decomposizione di P; è chiaro inoltre che

$$m(P \cup Q) = m(P) + m(Q) \quad \text{se} \quad \mathring{P} \cap \mathring{Q} = \varnothing. \tag{2.1}$$

In generale si ha

$$m(P \cup Q) + m(P \cap Q) = m(P) + m(Q).$$

e quindi

$$m(P \cup Q) \leq m(P) + m(Q). \tag{2.2}$$

Infatti, dato che $P = \overline{P \setminus Q} \cup (P \cap Q)$, $Q = \overline{Q \setminus P} \cup (P \cap Q)$ e $P \cup Q = \overline{P \setminus Q} \cup (P \cap Q) \cup \overline{Q \setminus P}$, si ha:

$$m(P) + m(Q) = m(\overline{P \setminus Q}) + m(P \cap Q) + m(\overline{Q \setminus P}) + m(P \cap Q) =$$
$$m(P \cup Q) + m(P \cap Q) \geq m(P \cup Q),$$

dato che ognuna di queste unioni è fra plurintervalli con interni a due a due disgiunti. Si noti inoltre che (2.1) implica che $m(P) \leq m(Q)$ se $P \subseteq Q$.

Se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto definiamo:

$$m(A) = \text{misura di } A = \sup\{m(P) : P \text{ plurintervallo } \subset A\}. \tag{2.3}$$

Osservazione 2.1.1. Dato che $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ con $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_k \neq \varnothing$ se $j \neq k$ per il Teorema 1.3.2, si ha:

$$m(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(I_k). \tag{2.4}$$

Infatti ogni $P_n = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ è un plurintervallo contenuto in A e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} m(I_k) = m(P_n) \leq m(A)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui $\sum_{k \in \mathbb{N}} m(I_k) \leq m(A)$. D'altra parte, se $m(A) < \infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $P \subset A$ tale che $m(P) > m(A) - \varepsilon/2$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un intervallo J_k contenente I_k al suo interno e tale che

$$m(J_k) < m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

L'unione degli interni di tutti i J_k è allora un ricoprimento aperto di P, da cui possiamo estrarre un sottoricoprimento finito; possiamo supporre che questo sia fatto dai primi n intervalli J_k. Perciò

$$m(A) - \varepsilon/2 < m(P) \leq m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} J_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} m(J_k) <$$
$$\sum_{k=1}^{n} m(I_k) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) + \varepsilon/2.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \geq m(A)$.

Se invece $m(A) = \infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $P \subset A$ tale che $m(P) > n$ e quindi si ripete il ragionamento di prima.

Teorema 2.1.2 (Subadditività ed additività sugli aperti)**.** *Siano $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di aperti tutti contenuti in un intervallo I di $\mathbb{R}^N$. Allora*

(i) $m\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$*;*

(ii) $m\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n)$ *se* $A_m \cap A_n = \varnothing$ *per* $m \neq n$*.*

Dimostrazione. Per quanto già osservato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$m(A_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_{k,n}) \quad \text{dove} \quad A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_{k,n}$$

e gli intervalli $I_{k,n}, k \in \mathbb{N}$, sono a due a due privi di punti interni in comune.

(i) Sia P un plurintervallo contenuto in $A_1 \cup A_2$. Fissato $\varepsilon > 0$, come fatto nell'Osservazione 2.1.1, possiamo trovare dei plurintervalli $J_{k,1}$ e $J_{k,2}$ contenenti al loro interno $I_{k,1}$ e $I_{k,2}$, rispettivamente, e tali che

$$m(J_{k,n}) < m(I_{k,n}) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad \text{per} \quad n = 1, 2 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dato che

$$P \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (I_{k,1} \cup I_{k,2}) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\mathring{J}_{k,1} \cup \mathring{J}_{k,2})$$

e P è compatto, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$P \subset \bigcup_{k=1}^{\nu} (\mathring{J}_{k,1} \cup \mathring{J}_{k,2}).$$

Perciò, per (2.2) abbiamo che

$$m(P) \le m\left(\bigcup_{k=1}^{\nu} (J_{k,1} \cup J_{k,2})\right) \le \sum_{k=1}^{\nu} m(J_{k,1}) + \sum_{k=1}^{\nu} m(J_{k,2}) \le$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} m(J_{k,1}) + \sum_{k=1}^{\infty} m(J_{k,2}) < \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{k,1}) + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} m(I_{k,2}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi $m(P) < m(A_1) + m(A_2) + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, cioè $m(P) \le m(A_1) + m(A_2)$ per ogni $P \subset A_1 \cup A_2$ e dunque $m(A_1 \cup A_2) \le m(A_1) + m(A_2)$. Iterando quest'ultima disuguaglianza otteniamo:

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{k} m(A_n),$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Infine, preso $P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n$ e quindi

$$m(P) \le m\Big(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{k} m(A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

per ogni $P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, e dunque la tesi.

(ii) Dato che gli A_n sono a due a due disgiunti tutti gli $I_{k,n}$, $n, k \in \mathbb{N}$, sono tra loro a due a due privi di punti interni in comune ed inoltre

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} I_{k,n}.$$

Osservando che

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n,k=1}^{\infty} m(I_{k,n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{k,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

concludiamo. □

Osservazione 2.1.3. È chiaro che, scegliendo $A_k = \varnothing$ per $k \geq n$, dal teorema otteniamo anche che

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

e

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \quad \text{se} \quad A_j \cap A_k = \varnothing, j \neq k.$$

2.2. Misure esterna ed interna di Lebesgue

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Poniamo allora

$$p_e(E) = \inf\{m(P) : P \text{ plurintervallo con } \mathring{P} \supseteq E\},$$
$$p_i(E) = \sup\{m(P) : P \text{ plurintervallo con } P \subseteq E\}.$$

Se $p_i(E) = p_e(E)$ si dice che E è *misurabile secondo Peano - Jordan* con misura $p(E) = p_i(E) = p_e(E)$.

Esempio 2.2.1 (Insieme non misurabile secondo Peano-Jordan)**.** L'insieme $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ non è misurabile secondo Peano-Jordan, perché ogni $P \subseteq E$ è vuoto, mentre ogni P con $\mathring{P} \supseteq E$ ha misura maggiore o uguale ad 1.

D'altra parte, E è numerabile, cioè $E = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Quindi questo esempio ci informa anche che l'unione numerabile di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan (ciascun insieme $\{q_n\}$) non è in generale misurabile secondo Peano-Jordan.

La misura di Lebesgue che stiamo per definire ovvierà a questo inconveniente. Cominciamo con il definire le misure esterna (di Lebesgue) di un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^N$: si pone

$$m_e(E) = \textit{misura esterna di } E = \inf\{m(A) : A \text{ aperto } \supseteq E\}. \tag{2.5}$$

In modo speculare a quanto fatto per gli aperti, se $K \subset \mathbb{R}^N$ è un compatto, poniamo per definizione

$$m(K) = \inf\{m(P) : P \text{ plurintervallo}, \mathring{P} \supset K\}.$$

È chiaro che se P è un plurintervallo chiuso allora la misura (del compatto) P coincide con la misura del plurintervallo P precedentemente definita.

Sia $E \in \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Si pone per definizione

$$m_i(E) = \textit{misura interna di } E = \sup\{m(K) : K \text{ compatto } \subseteq E\}.$$

Osservazione 2.2.2. È chiaro che la misura esterna di un aperto limitato A coincide con la sua misura precedentemente definita. Analogamente, anche la misura interna di un compatto K coincide con la sua misura precedentemente definita.

Infatti, per esempio, se A è aperto allora, per ogni aperto $B \supseteq A$, si ha $m(A) \leq m(B)$ e quindi $m(A) \leq m_e(A)$; d'altra parte $A \subseteq A$ e quindi $m_e(A) \leq m(A)$.

Teorema 2.2.3 (Subadditività della misura esterna)**.** *Siano $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ insiemi limitati di $\mathbb{R}^N$ tutti contenuti in un intervallo. Allora risulta che*

$$m_e\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k).$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste un aperto A_k contenente E_k e tale che $m(A_k) < m_e(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$.

L'insieme $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ è limitato e contenuto nell'aperto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ e quindi per il Teorema 2.1.2

$$m_e\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \leq m\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m(A_k) < \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k) + \varepsilon.$$

Si conclude allora per l'arbitrarietá di $\varepsilon > 0$. $\square$

2.3. Insiemi limitati misurabili secondo Lebesgue

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ limitato e siano K ed A un compatto ed un aperto tali che $K \subseteq E \subseteq A$. Dato che

$$K \subset \bigcup \{\mathring{I} : I \text{ intervallo}, I \subset A, \mathring{I} \cap K \neq \varnothing\} \subseteq A$$

e che K è compatto, esiste un numero finito di intervalli $I_1, \ldots, I_n \subset A$ tali che $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathring{I}_k$.

Posto $P = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, P è un plurintervallo e $K \subset \mathring{P} \subset P \subset A$. Perciò

$$m(K) \leq m(P) \leq m(A)$$

e dunque vale sempre la disuguaglianza

$$m_i(E) \leq m_e(E). \tag{2.6}$$

Si dice allora che un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^N$ è *misurabile secondo Lebesgue* se $m_i(E) = m_e(E)$; in questo caso si pone

$$m(E) = \textit{misura (di Lebesgue) di } E = m_i(E) = m_e(E). \tag{2.7}$$

Osservazione 2.3.1. Gli insiemi aperti o chiusi limitati sono misurabili secondo Lebesgue e la loro misura (di Lebesgue) coincide con quelle precedentemente definite.

Infatti se, per esempio, A è aperto, esiste una successione crescente di plurintervalli (chiusi) tali che $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(P_n)$. Ogni insieme P_n è compatto e $P_n \subset A$. Quindi $m(P_n) \leq m_i(A)$ da cui $m(A) \leq m_i(A)$. Abbiamo già osservato che $m(A) = m_e(A)$.

In modo analogo si dimostra che $m(K) = m_i(K) = m_e(K)$.

Osservazione 2.3.2. È evidente che, se E è limitato, risulta:

$$p_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq p_e(E).$$

Perciò ogni insieme misurabile secondo Peano-Jordan è anche misurabile secondo Lebesgue e le due misure coincidono.

Come abbiamo visto l'insieme $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ non è misurabile secondo Peano-Jordan; esso è invece misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla poiché

$$0 \leq m_i(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq m_e(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_e(\{q_n\}) = 0.$$

Lemma 2.3.3 (Superadditività finita)**.** *Siano $H, K \subset \mathbb{R}^N$ compatti e disgiunti. Allora*

$$m(H \cup K) \geq m(H) + m(K).$$

In particolare, se E ed F sono insiemi limitati e disgiunti, allora

$$m_i(E \cup F) \geq m_i(E) + m_i(F)$$

e, se E ed F sono anche misurabili, si ha che anche $E \cup F$ è misurabile e

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F).$$

Dimostrazione. Sia P un plurintervallo tale che $\mathring{P} \supset H \cup K$ e $m(P) < m(H \cup K) + \varepsilon$.

Dato che H e K sono compatti e disgiunti, la distanza $d(H, K)$ tra di essi è positiva. Scegliamo allora una decomposizione diadica di $\mathbb{R}^N$ in modo che il diametro di ogni cubo $Q_{m,n}$ sia più piccolo di $d(H, K)$. Possiamo definire quindi senza ambiguità i plurintervalli

$$P_H = \bigcup_{H \cap \mathring{Q}_{m,n} \neq \varnothing} Q_{m,n} \cap P, \quad P_K = \bigcup_{K \cap \mathring{Q}_{m,n} \neq \varnothing} Q_{m,n} \cap P.$$

Risulta che $P \supseteq P_H \cup P_K$, $\mathring{P}_H \supset H$, $\mathring{P}_K \supset K$ e $\mathring{P}_H \cap \mathring{P}_K = \varnothing$. Perciò :

$$m(H \cup K) + \varepsilon > m(P) \geq m(P_H \cup P_K) = m(P_H) + m(P_K) \geq m(H) + m(K).$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si conclude che $m(H \cup K) \geq m(H) + m(K)$.

Ora, per ogni H compatto, $H \subseteq E$, ed ogni K compatto, $K \subseteq F$, si ha che H e K sono disgiunti e quindi

$$m(H) + m(K) \leq m(H \cup K) \leq m_i(E \cup F).$$

Per l'arbitrarietà di H in E e di K in F, si conclude che $m_i(E \cup F) \geq m_i(E) + m_i(F)$.

L'ultima asserzione segue dalle disuguaglianze:

$$m(E) + m(F) = m_i(E) + m_i(F) \leq m_i(E \cup F) \leq \\ m_e(E \cup F) \leq m_e(E) + m_e(F) = m(E) + m(F),$$

dove si è usata la subadditività (al più) numerabile della misura esterna. □

Teorema 2.3.4 (Primo principio di Littlewood)**.** *Condizione necessaria e sufficiente perché un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^N$ sia misurabile secondo Lebesgue è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un compatto K ed un insieme F tali che*

$$K \cup F = E \quad e \quad m_e(F) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Se E è misurabile, (2.7) implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un compatto $K \subseteq E$ ed un aperto $A \supseteq E$ tali che $m(A) - m(K) < \varepsilon$. Posto $F = E \setminus K$ si ha che $E = K \cup F$ e $m_e(F) \leq m(A \setminus K)$, dato che $A \setminus K$ è un aperto che contiene F.

D'altra parte, $A \setminus K$, A e K sono misurabili perché aperti o compatti, e $(A \setminus K) \cup K = A$ e $(A \setminus K) \cap K = \varnothing$; quindi $m(A) = m(A \setminus K) + m(K)$, per il lemma precedente, e dunque $m_e(F) \leq m(A \setminus K) = m(A) - m(K) < \varepsilon$.

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un compatto K ed un insieme F con $E = K \cup F$ e $m_e(F) < \varepsilon$, otteniamo

$$m_e(E) \leq m_e(K) + m_e(F) < m(K) + \varepsilon \leq m_i(E) + \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi $m_e(E) \leq m_i(E)$. Si conclude con (2.6). □

2.4. Complementare, intersezione e unione

Teorema 2.4.1. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e contenuto in un intervallo I. Allora anche $I \setminus E$ è misurabile e risulta che $m(I \setminus E) = m(I) - m(E)$.*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$, esistono un compatto $K \subseteq E$ ed un aperto A, $E \subseteq A$, tali che $m(A) - m(K) < \varepsilon$. Si ha che $I \setminus E = (I \setminus A) \cup F$, dove $F = (I \setminus E) \setminus (I \setminus A)$, e $I \setminus A$ è compatto. Inoltre, $F \subseteq (A \cap I) \setminus K$. Perciò

$$m_e(F) \le m_e((A \cap I) \setminus K) \le m(A \setminus K) = m(A) - m(K) < \varepsilon.$$

Per il primo principio di Littlewood allora $I \setminus E$ è misurabile. D'altra parte, $I = (I \setminus E) \cup E$ e $(I \setminus E) \cap E = \varnothing$; quindi $m(I) = m(I \setminus E) + m(E)$, per il Lemma 2.3.3. □

Teorema 2.4.2. *L'intersezione di un numero finito o di un'infinità numerabile di insiemi limitati misurabili è misurabile.*

Dimostrazione. Siano $E_1, \dots, E_n, \dots$ insiemi misurabili contenuti in I e sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono un compatto $K_n \subseteq E_n$ ed un insieme F_n tali che $E_n = K_n \cup F_n$ e $m_e(F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Dato che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \Big) \cup F,$$

con $F \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$, e $m_e(F) \le \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} m_e(F_n) < \varepsilon$, per il primo principio di Littlewood si ha che $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ è misurabile, perché $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$ è compatto. □

Teorema 2.4.3 (Subaddittività ed additività numerabile)**.** *Sia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili e tutti contenuti in un intervallo I.*

Allora l'insieme $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ è misurabile e

$$m\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \Big) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} m(E_n). \tag{2.8}$$

Se inoltre gli insiemi E_n sono a due a due disgiunti, si ha:

$$m\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(E_n). \tag{2.9}$$

Dimostrazione. (i) Dato che

$$E = I \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (I \setminus E_n),$$

la misurabilità di E segue dai Teoremi 2.4.1 e 2.4.2.

Inoltre il Teorema 2.2.3 implica:

$$m(E) = m_e(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_e(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n).$$

(ii) Se E_1 ed E_2 sono misurabili e disgiunti, per il Lemma 2.3.3 sappiamo che $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$. Iterando questo risultato otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{k} m(E_n) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{k} E_n\Big) \leq m(E)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \leq m(E)$. □

Osservazione 2.4.4. Se E_1 ed E_2 sono limitati e misurabili ed I è un intervallo contenente sia E_1 che E_2, allora

$$E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap (I \setminus E_2)$$

e quindi anche $E_1 \setminus E_2$ è misurabile.

2.5. Insiemi misurabili non limitati

Un insieme non limitato $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* se per ogni $r > 0$ è misurabile l'insieme (limitato) $E \cap Q(0, r)$. Se E è misurabile si pone per definizione

$$m(E) = \lim_{r\to\infty} m(E \cap Q(0, r)).$$

Teorema 2.5.1. *Siano E ed $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Allora*

(i) $\mathbb{R}^N \setminus E$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *sono misurabili;*

(ii) *risulta*

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \tag{2.10}$$

e inoltre, se gli E_n sono a due a due disgiunti,

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n). \tag{2.11}$$

Dimostrazione. (i) Risulta che $(\mathbb{R}^N \setminus E) \cap Q(0, r) = Q(0, r) \setminus (E \cap Q(0, r))$,

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \cap Q(0, r) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cap Q(0, r))$$

e

$$\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \cap Q(0, r) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cap Q(0, r)),$$

per ogni $r > 0$.

(ii) Sia $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$; per il Teorema 2.4.3 si ha:

$$\begin{aligned} m(E\cap Q(0,r)) &= m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \cap Q(0,r)\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n\cap Q(0,r)) \le \\ & \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \end{aligned}$$

Dunque

$$m(E) = \lim_{r\to\infty} m(E\cap Q(0,r)) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n).$$

Se gli E_n sono a due a due disgiunti, si ha per il Teorema 2.4.3

$$\sum_{n=1}^{k} m(E_n\cap Q(0,r)) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{k} (E_n\cap Q(0,r))\Big) \le m(E)$$

per ogni $k\in\mathbb{N}$. Passando al limite per $r\to\infty$, si ottiene $\sum\limits_{n=1}^{k} m(E_n) \le m(E)$ per ogni $k\in\mathbb{N}$ e quindi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \le m(E),$$

che è la disuguaglianza che ci mancava. □

Il seguente risultato ci informa che, anche nel caso non limitato, la misura di un'insieme misurabile è sempre l'elemento separatore di due classi contigue di numeri reali.

Teorema 2.5.2. *Se $E\subseteq\mathbb{R}^N$ è misurabile (anche non limitato) allora*

$$\begin{aligned} m(E) &= \inf\{m(A) : A \text{ aperto, } A\supseteq E\} = \\ & \sup\{m(K) : K \text{ compatto, } K\subseteq E\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. (i) Se $m(E)=\infty$, allora $m(A)=\infty$ per ogni aperto $A\supseteq E$. Se invece $m(E)<\infty$, siano $E_n = E\cap(Q(0,n)\setminus Q(0,n-1))$, $n\in\mathbb{N}$. Ogni E_n è misurabile e limitato e quindi, per ogni $\varepsilon>0$ esiste un aperto $A_n\supseteq E_n$ tale che

$$m(A_n) < m(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

L'insieme $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ è aperto e contiene E ed inoltre

$$m(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) < \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) + \varepsilon = m(E) + \varepsilon.$$

(ii) Poniamo $F_n = E \cap Q(0, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Esiste un compatto $K_n \subseteq F_n$ tale che $m(K_n) > m(F_n) - 1/n$. Perciò

$$\begin{aligned} m(E) &= \lim_{n\to\infty} m(F_n) \le \lim_{n\to\infty} \{m(K_n) + 1/n\} = \\ & \lim_{n\to\infty} m(K_n) \le \lim_{n\to\infty} m(F_n) = m(E), \end{aligned}$$

cioè la tesi. □

2.6. Esempi notevoli

Concludiamo il capitolo con alcuni esempi importanti.

Esempio 2.6.1 (Aperto di misura piccola con frontiera grande)**.** Siano $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i razionali di $\mathbb{R}$. Definiamo

$$A_n = \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right), \quad i \in \mathbb{N}$$

e

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

L'insieme A è aperto e contiene tutti i numeri razionali; quindi $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{A} \subseteq \mathbb{R}$ e cioè $\overline{A} = \mathbb{R}$. Inoltre

$$m(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = \varepsilon.$$

Si ha quindi che $\mathbb{R} \setminus A$ è chiuso e $m(\mathbb{R} \setminus A) = \infty$; $\mathbb{R} \setminus A$ è la frontiera di A perché

$$\partial A = \overline{A} \setminus A = \mathbb{R} \setminus A.$$

Esempio 2.6.2 (L'insieme di Cantor)**.** Consideriamo l'intervallo chiuso $[0, 1]$ e dividiamolo in 3 sottointervalli di uguale lunghezza; rimuoviamo l'intervallo centrale aperto e poniamo

$$A_1 = (1/3, 2/3), \quad C_1 = [0, 1] \setminus A_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

Indichiamo, rispettivamente con Δ_0 e Δ_1, le componenti connesse di sinistra e di destra dell'insieme C_1. Suddividiamo poi in 3 parti uguali ognuno dei sottointervalli Δ_0 e Δ_1 e rimuoviamo di nuovo gli intervalli centrali aperti. L'insieme rimosso è

$$A_2 = (1/3^2, 2/3^2) \cup (7/3^2, 8/3^2),$$

mentre

$$C_2 = [0, 1] \setminus (A_1 \cup A_2) = [0, 1/3^2] \cup [2/3^2, 3/3^2] \cup [6/3^2, 7/3^2] \cup [8/3^2, 1]$$

è quello che rimane.

Procedendo come prima, indichiamo rispettivamente con Δ_{00} e Δ_{01} le componenti connesse di sinistra e di destra di $\Delta_0 \cap C_2$ e con Δ_{10} e Δ_{11} le componenti connesse di sinistra e di destra di $\Delta_1 \cap C_2$.

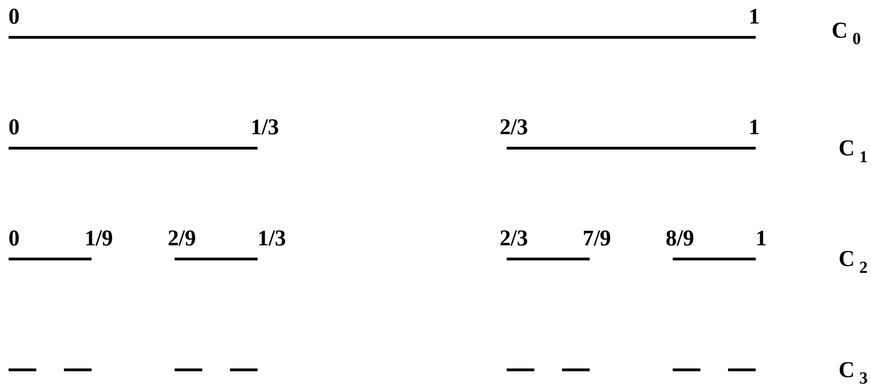

Figura 1. La costruzione dell'insieme di Cantor.

Procedendo in questo modo, definiamo una successione di insiemi aperti A_n, unione di 2^{n-1} intervalli aperti di lunghezza uguale a 3^{-n}. L'insieme C_n corrispondente è allora definito da

$$C_n = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n \in \{0,1\}} \Delta_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}.$$

L'*insieme di Cantor* è ciò che resta dopo aver rimosso tutti gli A_n, cioè

$$K = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

L'insieme di Cantor K ha le molte proprietà interessanti che elenchiamo e dimostriamo qui di seguito.

(i) $m(K) = 0$. Infatti, osserviamo che $m(A_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ e quindi

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 1,$$

per cui $m(K) = 1 - m\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0$.

(ii) È evidente che K contiene tutti gli estremi degli intervalli in A_n.

(iii) K è compatto, perché chiuso e limitato.

(iv) K è *perfetto* (cioè è chiuso e ogni suo punto è di accumulazione di punti di K). Infatti, se $x \in K$ allora $x \in C_n$ per ogni n. C_n è formato da 2^n intervalli di lunghezza $1/3^n$. Sia x_n l'estremo sinistro dell'intervallo di C_n

che contiene x o l'estremo destro se quello sinistro coincide con x. In questo modo,

$$0 < |x - x_n| < 1/3^n$$

e quindi $x_n \to x$ se $n \to \infty$.

(v) K non ha punti interni. Infatti, se K contenesse un intervallo aperto (a, b), questo avrebbe misura nulla e quindi non sarebbe un intervallo.

(vi) (Rappresentazione ternaria di un numero in K) Per ogni numero reale x, $0 \leq x \leq 1$, esiste una successione $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di interi con $i_n \in \{0, 1, 2\}$ tale che

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}.$$

Tale successione è unica, tranne quando x è della forma $\dfrac{q}{3^n}$ con $q \in \mathbb{N}$, nel qual caso di successioni ne esistono esattamente due. Viceversa, per ogni successione $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di interi con $i_n \in \{0, 1, 2\}$, la serie $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{i_n}{3^n}$ converge ad un numero reale x, $0 \leq x \leq 1$.

Come si costruisce la successione: si divide l'intervallo $[0, 1]$ in 3 intervalli:

$$B_0 = [0, 1/3], \quad B_1 = [1/3, 2/3], \quad B_2 = [2/3, 1],$$

cioè $B_i = [i/3, (i + 1)/3]$, $i = 0, 1, 2$, e si prende $i_1 = i$ se $x \in B_i$. Una volta scelto i_1 Si divide poi l'intervallo B_{i_1} che contiene x in 3 subintervalli, $B_{i_1 i} = [i_1/3+i/3^2, i_1/3+(i+1)/3^2]$, $i = 0, 1, 2$, e si prende $i_2 = i$ se $x \in B_{i_1 i}$. E così via.

Se però $x = q/3^n$ (per esempio $x = 8/9$) allora esiste un indice i_n tale che $x \in B_{i_1\cdots i_{n-1}(i_n-1)} \cap B_{i_1\cdots i_{n-1}i_n}$ (e.g. $8/9 \in B_{21} \cap B_{22}$), e quindi x apparterrà a tutti gli intervalli $B_{i_1\cdots(i_n-1)22\cdots}$ e $B_{i_1\cdots i_n 00\cdots}$ (e.g $8/9 \in B_{2122\cdots} \cap B_{2200\cdots}$).

Se K è l'insieme di Cantor, allora K = insieme dei punti di $[0, 1]$ che hanno almeno una espansione ternaria che non contiene 1.

Infatti nella costruzione di K, ad ogni passo si divide per 3 l'intervallino precedente e si elimina il nuovo intervallino centrale che abbiamo deciso di associare alla cifra 1.

(vii) K non è numerabile. Infatti la (vi) ci dice che c'è una corrispondenza biunivoca di K con l'insieme delle successioni di 0 e di 2: e quindi con l'insieme delle successioni di 0 e di 1 cioè , in definitiva, con le rappresentazioni binarie dei numeri reali nell'intervallo $[0, 1]$ che non è numerabile.

In altre parole, ad ogni $x \in K$ associamo la sua rappresentazione ternaria

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n} \quad \text{con} \quad i_n \in \{0, 2\}$$

e quindi, ponendo $i_n = 2\,j_n$ con $j_n \in \{0,1\}$, associamo ad x la rappresentazione binaria

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{2^n}$$

di un numero in $[0,1]$. Tale $f : K \to [0,1]$ è una corrispondenza biunivoca.

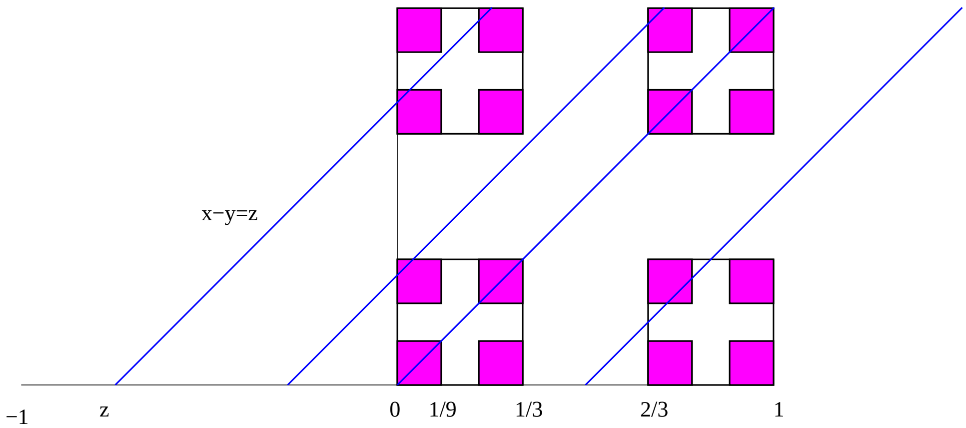

Figura 2. Ogni retta $x - y = z$, $-1 \le z \le 1$, interseca ogni $C_n \times C_n$ in almeno un punto.

(viii) L'insieme $K - K = \{x - y : x, y \in K\}$ contiene tutto l'intervallo $[-1,1]$, cioè per ogni $z \in [-1,1]$ esistono x, y in K tali che $x-y = z$. Infatti, sia π la proiezione da $[0,1]\times[0,1]$ su $[-1,1]$ così definita:

$$\pi(x,y) = x - y.$$

Osserviamo (vedi Fig. 2) che

$$\pi(C_1 \times C_1) \supset [-1,1], \;\; \pi(C_2 \times C_2) \supset [-1,1], \;\; \ldots, \;\; \pi(C_n \times C_n) \supset [-1,1], \ldots$$

Se $z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \pi(C_n \times C_n)$, per ogni n esistono x_n e y_n tali che $z = x_n - y_n$. Quando $n \to \infty$ x_n e y_n convergono rispettivamente a due punti x ed y di K e quindi $z = x - y$. Dunque

$$\pi(K \times K) \supset \bigcap_{n=0}^{\infty} \pi(C_n \times C_n) \supset [-1,1].$$

Esempio 2.6.3 (L'insieme di Vitali)**.** Nell'insieme $\mathbb{R}$ introduciamo la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in (0,1)$ tale che $y \sim x$. Infatti esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $0 < x - q < 1$ e quindi basta scegliere $y = x - q$.

Sia $V \subset (0,1)$ l'insieme formato scegliendo da ogni classe di equivalenza dell'insieme quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ *un solo elemento* appartenente a $(0,1)$; V si può costruire per l'assioma della scelta. L'insieme V ha le seguenti proprietà.

(i) Se $r, s \in \mathbb{Q}$ e $r \neq s$, allora $(r+V) \cap (s+V) = \varnothing$. Altrimenti esisterebbero $y, z \in V$ tali che $r+y = s+z$ e quindi $y-z = s-r \in \mathbb{Q}$, $s - r \neq 0$. Questo è assurdo poiché y e z appartengono a classi diverse.

(ii) Per ogni $x \in (0,1)$ esiste $r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}$ tale che $x \in r+V$. Infatti esiste $y \in V$ che rappresenta x; posto $r = x - y$, allora $r \in \mathbb{Q}$ e

$$-1 = 0 - 1 < r = x - y < 1 - 0 = 1.$$

Le proprietà (i) e (ii) ci fanno concludere che V non è misurabile. Infatti, se V lo fosse, posto

$$E = \bigcup_{r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}} (r+V),$$

anche E sarebbe misurabile e si avrebbe $E \subseteq (-1,2)$. Perciò sarebbe $m(E) \leq 3$. D'altra parte, per la proprietà (i) si ha che

$$3 \geq m(E) = \sum_{r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}} m(r+V) = \sum_{r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}} m(V),$$

dato che $m(r+V) = m(V)$ per ogni r. Ciò implica che $m(V) = 0$, e quindi $m(E) = 0$.

Per la proprietà (ii) però , $E \supseteq (0,1)$ e quindi $m(E) \geq 1$ — assurdo.

Esercizi

1. Dimostrare che la misura di un plurintervallo P non dipende dalla particolare decomposizione di P in intervalli con interni a due a due disgiunti.

2. La misura di un compatto K si può anche definire, a partire dalla misura di un aperto, così :

$$m(K) = m(I) - m(\mathring{I} \setminus K),$$

dove I è un intervallo contenente K.

Dimostrare che questa definizione non dipende dal particolare intervallo scelto e che è equivalente alla definizione già data.

3. Se E e F sono misurabili, dimostrare che

$$m(E) + m(F) = m(E \cup F) + m(E \cap F).$$

4. Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$, allora anche l'insieme traslato $x_0 + E = \{x_0 + y : y \in E\}$ e l'insieme dilatato $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$ sono misurabili e risulta che

$$m(x_0 + E) = m(E) \quad \text{e} \quad m(\lambda E) = \lambda^N m(E).$$

5. Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera di misura di Lebesgue nulla. Dimostrare che E è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura eguaglia quelle del suo interno e della sua chiusura.
6. Dimostrare che ogni sottoinsieme misurabile dell'insieme di Vitali ha misura zero.
7. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con $m(E) > 0$. Allora E contiene un sottoinsieme non misurabile.
8. In che relazione stanno
$$m(\liminf_{n\to\infty} E_n) \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} m(E_n),$$
e
$$m(\limsup_{n\to\infty} E_n) \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} m(E_n)?$$
Costruire degli esempi in cui i numeri di ciascuna coppia sono tra loro diversi.
9. Si dice che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ genera una tassellatura se
$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^N} (E+n) = \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad (E+n)\cap(E+m) = \varnothing \quad \text{per} \quad n \neq m.$$
Dimostrare che se E genera una tassellatura, allora $m(E) = 1$.
10. Siano $E_n \subset (0,1)$, $n = 1, \dots, k$ insiemi misurabili e sia $\sum_{n=1}^{k} m(E_n) > k-1$. Allora l'insieme $\bigcap_{n=1}^{k} E_n$ ha misura positiva.
11. Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi misurabili dell'intervallo $(0,1)$ e supponiamo che
$$\limsup_{n\to\infty} m(E_n) = 1.$$
Dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{E_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che l'insieme $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_{n_k}$ ha misura positiva.
12. Dimostrare che l'insieme di Cantor è misurabile secondo Peano-Jordan.
13. Costruire un insieme perfetto, privo di punti interni e con misura positiva.
14. Trovare un sottoinsieme del quadrato di lato 1 che abbia misura zero e tale che dati comunque due numeri a e b tra 0 e 1, l'insieme contiene la frontiera di un rettangolo con lati che misurano a e b.

Capitolo 3

Spazi e funzioni misurabili

3.1. Spazi misurabili

Sia X un insieme qualsiasi. Una collezione $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di X è una σ-algebra se:

(i) $X \in \mathcal{M}$,

(ii) $E \in \mathcal{M}$ implica che $E^c = X \setminus E \in \mathcal{M}$,

(iii) $E_n \in \mathcal{M}$ per $n \in \mathbb{N}$ implica che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

Esempio 3.1.1. Sono σ-algebre:

(a) l'insieme delle parti di un qualsiasi insieme X;

(b) la famiglia formata dal solo X e dall'insieme vuoto $\varnothing$ in un insieme qualsiasi X;

(c) i sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue di $X = \mathbb{R}^N$;

(d) i sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue di un qualunque insieme misurabile secondo Lebesgue $X = E$.

Osservazione 3.1.2. È chiaro che ogni σ-algebra contiene l'insieme vuoto. Inoltre, ponendo nella (iii) $E_n = \varnothing$ per $n = m+1, m+2, \dots,$ anche le unioni finite di insiemi di una σ-algebra $\mathcal{M}$ stanno ancora in $\mathcal{M}$. Infine, le intersezioni numerabili di insiemi di $\mathcal{M}$ sono contenute ancora in $\mathcal{M}$, perché

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^c\Big)^c.$$

Proposizione 3.1.3. *Sia $\mathcal{F}$ una qualsiasi collezione di sottoinsiemi di un insieme X. Allora esiste una σ-algebra $\mathcal{M}^*$ in X che è la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{F}$; $\mathcal{M}^*$ si dice la σ- algebra generata da $\mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Sia Ω la famiglia di σ-algebre in X contenenti $\mathcal{F}$; Ω non è vuota perché contiene almeno l'insieme delle parti di X.

Sia allora

$$\mathcal{M}^* = \bigcap_{\mathcal{M}\in\Omega} \mathcal{M}.$$

È facile verificare che $\mathcal{M}^*$ è ancora una σ-algebra e contiene $\mathcal{F}$. $\square$

Sia (X, τ) uno spazio topologico. La σ-algebra generata da τ e cioè la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli aperti di X si indica con $\mathcal{B}$ e i suoi elementi sono detti *insiemi boreliani.*

Osservazione 3.1.4. (i) Sono insiemi boreliani le unioni numerabili di chiusi e le intersezioni numerabili di aperti.

(ii) Tutti i boreliani di $\mathbb{R}^N$ sono insiemi misurabili secondo Lebesgue, perché fra questi ci sono anche gli aperti.

Se $\mathcal{M}$ è una σ-algebra in X, $(X, \mathcal{M})$ si dice uno *spazio misurabile* e gli elementi di $\mathcal{M}$ si dicono *insiemi misurabili.*

3.2. Funzioni misurabili

Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e sia Y uno spazio topologico; una funzione $f : X \to Y$ si dice *misurabile* se, per ogni aperto A in Y è misurabile la retroimmagine $f^{-1}(A)$ di A secondo f.

Si noti il parallelismo tra le definizioni di spazio e funzione misurabile e quelle di spazio topologico e funzione continua. In particolare, sappiamo che la composizione di funzioni continue è continua; la seguente proposizione tratta il caso analogo per le funzioni misurabili.

Proposizione 3.2.1. *Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile ed Y, Z spazi topologici. Sia $f : X \to Y$ misurabile e sia $g : Y \to Z$ continua.*

Allora $g \circ f : X \to Z$ è misurabile.

Dimostrazione. Sia A un aperto di Z; dato che $g^{-1}(A)$ è aperto in Y, allora l'insieme

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

è misurabile. $\square$

Studieremo con attenzione particolare le funzioni a valori nella *retta reale estesa* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; gli aperti di $\overline{\mathbb{R}}$ sono unioni di tre tipi di intervalli: $(a, b), [-\infty, b)$ e $(a, +\infty]$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Le operazioni di somma e moltiplicazione in $\overline{\mathbb{R}}$ obbediscono alle seguenti convenzioni:

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$
$$+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R},$$
$$(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ se } x > 0, \\ -\infty \text{ se } x < 0, \end{cases}$$

per ogni $x \neq 0$.

Il seguente risultato rende più agevole determinare la misurabilità di una funzione a valori nella retta estesa.

Teorema 3.2.2. *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora f è misurabile se e solo se per ogni $t \in \mathbb{R}$ è misurabile uno degli insiemi di livello*

$$\begin{aligned} L_+(f, t) &= f^{-1}((t, +\infty]) = \{x \in X : f(x) > t\}, \\ L_+^*(f, t) &= f^{-1}([t, +\infty]) = \{x \in X : f(x) \geq t\}, \\ L_-(f, t) &= f^{-1}([-\infty, t)) = \{x \in X : f(x) < t\}, \\ L_-^*(f, t) &= f^{-1}([-\infty, t]) = \{x \in X : f(x) \leq t\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se f è misurabile, allora ogni insieme di livello è misurabile, essendo la retroimmagine di un aperto o del complementare di un aperto.

Viceversa, dimostriamo preliminarmente che la misurabilità di ciascun insieme di livello è equivalente a quella di ogni altro nella lista. Infatti, dato che

$$\begin{aligned} L_+^*(f, t) = f^{-1}([t, +\infty]) &= f^{-1}\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (t - 1/n, +\infty] \Big) = \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_+(f, t - 1/n), \end{aligned}$$

$L_+^*(f, t)$ è misurabile se ogni $L_+(f, t)$ lo è; dato che $L_-(f, t) = X \setminus L_+^*(f, t)$, $L_-(f, t)$ è misurabile se $L_+^*(f, t)$ è misurabile, perché è il complementare di un insieme misurabile; analogamente, il fatto che

$$L_-{}^*(f, t) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_-(f, t + 1/n)$$

implica che $L_-{}^*(f, t)$ è misurabile se ogni $L_-(f, t)$ lo è, mentre $L_+(f, t) = X \setminus L_-{}^*(f, t)$. implica che $L_+(f, t)$ è misurabile se $L_-^*(f, t)$ lo è.

Infine, per il Teorema 1.3.1, ogni aperto A di $\overline{\mathbb{R}}$ è l'unione numerabile di intervalli I_n dei tre tipi: $(a, b), [-\infty, b), (a, +\infty]$. Perciò per quanto appena dimostrato $f^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n)$ è misurabile se uno degli insiemi della lista lo è per ogni $t \in \mathbb{R}$. □

Esempio 3.2.3. (i) Sia $E \subseteq X$. La funzione caratteristica $\mathcal{X}_E$ è misurabile se e solo se E è misurabile.

Infatti

$$L_+(\mathcal{X}_E, t) = \begin{cases} \varnothing, & \text{se } t \geq 1, \\ E, & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ X, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

(ii) Ogni funzione continua su uno spazio topologico X è chiaramente misurabile se la σ-algebra definita su X contiene gli aperti di X.

Esempio 3.2.4. Un esempio importante di funzioni misurabili sono le funzioni semicontinue.

Sia X uno spazio topologico; si dice che $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è *semicontinua inferiormente* se $L_+(f, t)$ è aperto per ogni $t \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, se in ogni $x_0 \in X$ si ha:

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Si dice che f è *semicontinua superiormente* se $L_-(f, t)$ è aperto per ogni $t \in \mathbb{R}$ o se in ogni $x_0 \in X$ si ha:

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Per esempio, la funzione caratteristica di un aperto è inferiormente semicontinua in $\mathbb{R}^N$; la funzione caratteristica di un chiuso è superiormente semicontinua in $\mathbb{R}^N$.

Siano X e Y spazi topologici. Si dice che $f : X \to Y$ è *boreliana* (o misurabile secondo Borel) se

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{B}_X, \quad \text{per ogni aperto} \quad V \subset Y.$$

È chiaro che gni $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ boreliana è misurabile secondo Lebesgue.

Proposizione 3.2.5. *Siano X ed Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione boreliana. Allora risulta che $f^{-1}(B)$ è un boreliano di X per ogni boreliano B di Y.*

Dimostrazione. La famiglia $\Omega = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X\}$ è una σ-algebra in Y che Ω contiene tutti gli aperti di Y, dato che f è boreliana. Perciò $\mathcal{B}_Y \subseteq \Omega$ e quindi $f^{-1}(B)$ è un boreliano di X se B è un boreliano di Y. $\square$

Teorema 3.2.6. *Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile.*

(i) Siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora sono misurabili le funzioni $f + g$, cf ed fg.

(ii) Siano $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, misurabili. Sono allora misurabili anche le funzioni:

$$S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \qquad s(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$

$$l'(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \qquad l''(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

Dimostrazione. (i) Si ha che

$$L_+(f+g,t) = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} L_+(f,q) \cap L_+(g,t-q)$$

e l'unione è numerabile. È facile inoltre dimostrare che $c\,f$ è misurabile per ogni $c \in \mathbb{R}$ se f è misurabile.

Dato che $f\,g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$, per quanto appena dimostrato, basterà dimostrare il caso particolare in cui $f = g = h$ e cioè $f\,g = h^2$. Risulta

$$L_+(h^2,t) = \begin{cases} X \text{ se } t < 0, \\ L_-(h, -\sqrt{t}) \cup L_+(h, \sqrt{t}) \text{ se } t \geq 0, \end{cases}$$

e quindi h^2 è misurabile se h lo è.

(ii) Si ha che

$$L_+(S,t) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} L_+(f_n,t) \ \text{ e } \ L_-(s,t) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} L_-(f_n,t).$$

La misurabilità di l' ed l'' si ottiene iterando le operazioni di inf e sup. □

Corollario 3.2.7. *Se $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sono misurabili, sono misurabili anche le funzioni*

$$\max(f,g), \ \min(f,g),$$
$$f^+ = \max(f,0), \ f^- = \max(0,-f), \ |f| = f^+ - f^-$$

e l'insieme $\{x \in X \ f(x) > g(x)\}$.

Osservazione 3.2.8. Sia $E \in \mathcal{M}$. Dato che E è anch'esso uno spazio misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{M}_E = \{E \cap F : F \in \mathcal{M}\}$, possiamo estendere i risultati fin qui dimostrati per funzioni misurabili su X alle funzioni misurabili su un ogni insieme misurabile E.

3.3. Approssimazione mediante funzioni semplici

Una funzione $s : X \to \mathbb{R}$ si dice *semplice* se è misurabile ed assume un numero finito di valori. Se $c_1, \dots, c_n$ sono i valori *distinti* di una funzione semplice s, allora, posto $E_k = \{x \in X : s(x) = c_k\}$, $k = 1, \dots, n$, gli E_k sono tutti misurabili, a due a due disgiunti e la loro unione è tutto X; quindi si può scrivere

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{X}_{E_k}(x),\ x \in X.$$

Teorema 3.3.1 (Approssimazione mediante funzioni semplici)**.** *Sia data una funzione $f : X \to [0, +\infty]$ misurabile. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici s_n che converge ad f puntualmente.*

Se in più f è limitata, allora le funzioni s_n convergono ad f uniformemente.

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbb{N}$ e poniamo:

$E_n = f^{-1}([n, +\infty])$ e $E_{n,k} = f^{-1}([(k-1)/2^n, k/2^n)),\ k = 1, \dots, n2^n.$

La funzione

$$s_n(x) = n\mathcal{X}_{E_n}(x) + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathcal{X}_{E_{n,k}}(x)$$

è semplice perché E_n ed $E_{n,k}$ sono misurabili. Inoltre $s_n \le f$ per costruzione.

Si noti che

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k-1} \cup E_{n+1,2k}$$

e quindi se $x \in E_{n,k}$ risulta

$$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \le \min[(2k-1)/2^{n+1}, 2k/2^{n+1}] \le s_{n+1}(x).$$

Analogamente

$$E_n = E_{n+1} \cup \bigcup_{k=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} E_{n+1,k}$$

e quindi se $x \in E_n$ risulta ancora

$$s_n(x) = n < n+1 = s_{n+1}(x) \quad \text{se} \quad x \in E_{n+1}$$

e, se $k = n2^{n+1} + 1, \dots, (n+1)2^{n+1}$,

$$s_n(x) = n \le \frac{k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x) \quad \text{se} \quad x \in E_{n+1,k}\ .$$

Perciò $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente.

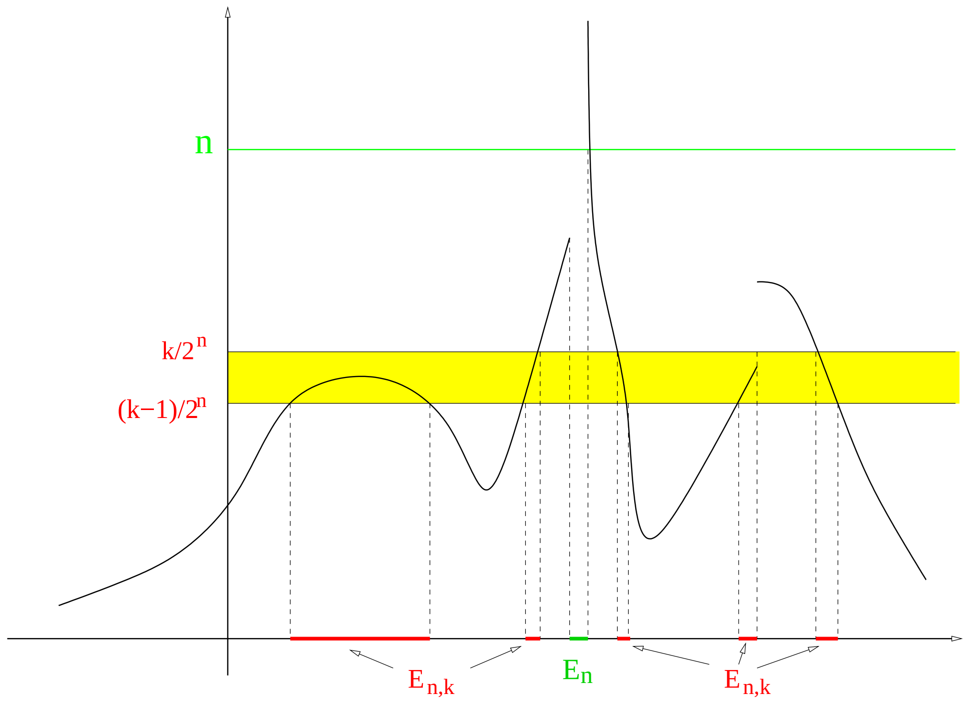

Figura 1. Approssimazione con funzioni semplici

Se ora $f(x) = +\infty$, allora $s_n(x) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $s_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$. Se $f(x) < \infty$, esiste $\nu \in N$ tale che $f(x) < \nu$. Se $n > \nu$ si ha allora

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

e quindi $s_n(x) \to f(x)$.

Se infine f è limitata, preso $n > \sup_X f$, si avrà $0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$ per ogni $x \in X$ e cioè $\sup_X |f - s_n| \leq \frac{1}{2^n} \to 0$ se $n \to \infty$. $\square$

3.4. I tre principi di Littlewood

Si consideri $\mathbb{R}^N$ con la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Le seguenti affermazioni passano sotto il nome di *principi di Littlewood.*[1]

(i) Ogni insieme misurabile (di misura finita) è quasi un chiuso.

(ii) Ogni successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque è quasi uniformemente convergente.

---

[1] Si veda a proposito [**MP**].

(iii) Ogni funzione misurabile è quasi continua.

L'affermazione (i) è il contenuto del Teorema 2.3.4 che abbiamo già dimostrato nel caso di insiemi misurabili limitati e che si può estendere facilmente al caso di insiemi di misura finita.

Il significato del secondo principio di Littlewood è reso evidente dal seguente risultato.

Teorema 3.4.1 (Egoroff-Severini)**.** *Sia E un insieme misurabile e limitato e siano f ed f_n, $n \in \mathbb{N}$, funzioni misurabili in E e quasi ovunque finite.*

Allora

$$f_n \to f \quad q.o.\ in \quad E$$

se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset E$ tale che

$$m(E \setminus K) < \varepsilon \quad e \quad f_n \to f \quad uniformemente\ su \quad K. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Se $f_n \to f$ q.o. in E, il sottoinsieme dei punti di $x \in E$ in cui $f(x)$ ed $f_n(x)$ sono finiti e tali che $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ ha la stessa misura di E; possiamo quindi supporre senza perdere di generalità che $f(x)$ ed ogni $f_n(x)$ siano finiti e che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in E$. Osserviamo allora che possiamo scrivere che

$$E = \big\{ x \in E : \limsup_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \big\}.$$

Dati n ed $m \in \mathbb{N}$ definiamo:

$$E_{n,m} = \Big\{ x \in E : \sup_{k\geq n} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \Big\}.$$

Si osserva che, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $E_{n,m} \subseteq E_{n+1,m}$ ed inoltre

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,m} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_{n+1,m} \setminus E_{n,m}) \quad \text{per ogni} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Dato che gli insiemi nella seconda unione sono a due disgiunti, abbiamo che

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_{n+1,m} \setminus E_{n,m}) = \lim_{n\to\infty} m(E_{n,m})$$

(si veda anche il Teorema 4.1.2). Perciò, fissati $\varepsilon > 0$ ed $m \in \mathbb{N}$ esiste un indice $\nu = \nu(\varepsilon, m)$ tale che

$$m(E \setminus E_{\nu,m}) < \varepsilon/2^{m+1}.$$

Sia $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{\nu(\varepsilon,m),m}$; allora $E \setminus F = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E_{\nu(\varepsilon,m),m})$ e quindi

$$m(E \setminus F) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m(E \setminus E_{\nu(\varepsilon,m),m}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esiste inoltre un compatto $K \subset F$ tale che $m(F \setminus K) < \varepsilon/2$ e quindi

$$m(E \setminus K) = m(E \setminus F) + m(F \setminus K) < \varepsilon.$$

Siccome $K \subset F = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{\nu(\varepsilon,m),m}$, per ogni m esiste un indice $\nu(\varepsilon, m)$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \text{per ogni} \quad n \geq \nu(\varepsilon, m) \quad \text{ed ogni} \quad x \in K,$$

cioè f_n converge uniformemente ad f in K.

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset E$ che soddisfa (3.1), per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste un compatto $K_m \subset E$ tale che $f_n \to f$ uniformemente su K_m e $m(E \setminus K_m) < 1/m$. Allora $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in F = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$ e

$$m(E \setminus F) = m\Big(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} (E \setminus K_m)\Big) = \lim_{m \to \infty} m(E \setminus K_m) = 0.$$

$\square$

Una funzione f definita su un insieme misurabile E si dice *quasi continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $K \subset E$ tale che $m(E \setminus K) < \varepsilon$ ed f ristretta a K è continua.

Lemma 3.4.2. *Le funzioni semplici definite in insiemi di misura finita sono quasi continue.*

Dimostrazione. Sia $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{X}_{E_j}$ dove $c_1, \ldots, c_n$ sono distinti e $E_j = \{x \in E \,:\, f(x) = c_j\}$. Gli insiemi E_j sono misurabili, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $K_j \subset E_j$ tale che $m(E_j \setminus K_j) < \varepsilon/n$. L'insieme $K = \bigcup_{j=1}^{n} K_j$ è un chiuso e $m(E \setminus K) < \varepsilon$. I chiusi K_j sono disgiunti ed f è costante su ogni K_j, quindi f è continua su K. $\square$

Il terzo principio di Littlewood è riassunto nel seguente teorema.

Teorema 3.4.3 (Lusin)**.** *Sia E un insieme misurabile di misura finita e sia f quasi ovunque finita in E. Allora, f è misurabile in E se e solo se f è quasi continua in E.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo che f sia misurabile e $f \geq 0$. Esiste una successione s_n di funzioni semplici che converge quasi ovunque a f.

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Per ogni n esiste un chiuso $K_n \subset E$ tale che $m(E \setminus K_n) < \varepsilon/2^{n+1}$ e s_n è continua su K_n. Per il teorema di Egoroff-Severini esiste inoltre un chiuso $K_0 \subset E$ tale che $m(E \setminus K_0) < \varepsilon/2$ e s_n

converge uniformemente ad f in K_0. In $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ la successione s_n converge uniformemente ad f e, siccome le s_n sono continue in K, allora anche f è continua in K. Rimane da osservare che

$$m(E \setminus K) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(E \setminus K_n) < \varepsilon.$$

Se f cambia segno, basta scrivere $f = f^+ - f^-$ con f^+ e f^- funzioni misurabili non negative.

($\Leftarrow$) Supponiamo che f sia quasi continua e sia $t \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso K con $m(E \setminus K) < \varepsilon$ ed f è continua in K. Quindi

$$\{x \in E \ : \ f(x) \geq t\} = \{x \in K \ : \ f(x) \geq t\} \cup \{x \in E \setminus K \ : \ f(x) \geq t\},$$

dove il primo insieme a secondo membro è chiuso, perché f è continua in K mentre il secondo è contenuto in $E \setminus K$ ed ha quindi misura esterna minore di ε. Per il primo principio di Littlewood, l'insieme di livello a primo membro è misurabile. $\square$

Osservazione 3.4.4. Si dice che una funzione è continua quasi ovunque in E se

$$m\left(\{x \in E \ : \ f \text{ è discontinua in } x\}\right) = 0.$$

I concetti di funzione continua quasi ovunque e di funzione quasi continua non coincidono. Per esempio: $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ è misurabile, quindi è quasi continua, ma è discontinua in ogni punto di $[0,1]$.

3.5. Esempi notevoli

Esempio 3.5.1 (La scala di Cantor)**.** Usando l'insieme di Cantor si può costruire una funzione s continua e non decrescente in $[0,1]$ con $s'(x) = 0$ q.o. in $[0,1]$ e s non costante. Useremo alcune notazioni usate nell'Esempio 2.6.2.

La funzione è così definita:

$$s(0) = 0, \quad s(1) = 1, \quad s = 1/2 \ \text{ in } \ \overline{A}_1 = [1/3, 2/3].$$

Cioè s nella chiusura di A_1 è uguale alla media dei valori in 0 e 1. Si divide poi $[0, 1/3]$ in 3 intervalli e si pone $s = 1/4$ in quello centrale chiuso, cioè nell'intervallo centrale si assegna ad s il valore della media negli estremi. Analogamente si divide $[2/3, 1]$ in 3 parti e si pone $s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4}$ in $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ e così via.

In questo modo s risulta definita in $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ cioè quasi ovunque in $[0,1]$; s può essere prolungata con continuità a tutto $[0,1]$ osservando che la successione di funzioni continue i cui grafici sono disegnati in Figura 3 converge

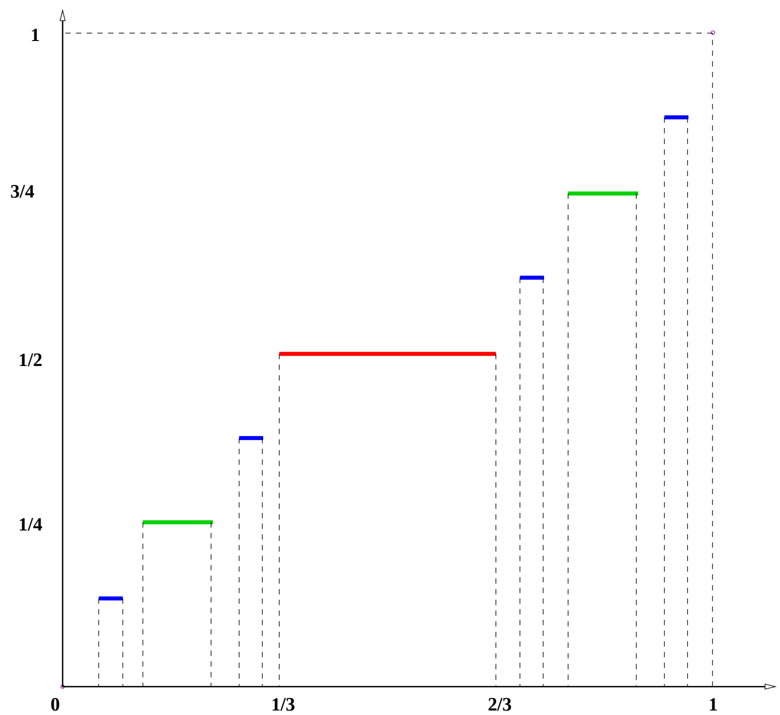

Figura 2. La scala di Cantor.

uniformemente ad una funzione continua che coincide con s negli insiemi $\overline{A}_n$.

Osserviamo che s è costante su ciascuno degli intervalli componenti A_n e quindi $s' = 0$ quasi ovunque in $[0,1]$, dato che la misura totale di tutti quegli intervalli è ugale ad 1.

Una descrizione alternativa della scala di Cantor si ottiene nel modo seguente. Sia x un numero reale in $(0,1)$ con espansione ternaria $\{a_n\}$. Sia

$$N = \begin{cases} \infty, & \text{se } \ a_n \neq 1 \ \text{ per ogni } \ n \in \mathbb{N}, \\ \min\{n : a_n = 1\}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si pone allora

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n, & \text{se } \ n < N, \\ 1, & \text{se } \ n = N, \\ 0, & \text{se } \ n > N, \end{cases}$$

e

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}.$$

Si noti bene che:

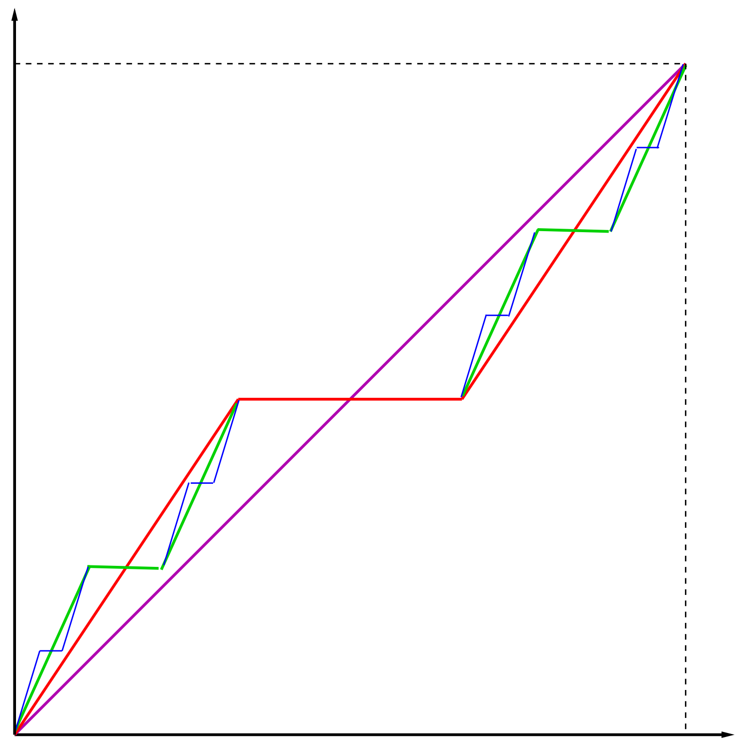

Figura 3. Approssimazione della scala di Cantor.

(i) la definizione è ben posta anche se x ammette due espansioni ternarie; per esempio, a $\frac{1}{3}$ si possono associare le successioni $(1, 0, 0, \cdots)$ e $(0, 2, 2, \cdots)$; nel primo caso si ha $N = 1$ e quindi $b = (1, 0, 0, \cdots)$, da cui segue $s(1/3) = 1/2$; nel secondo caso, $N = \infty$ e quindi $b = (0, 1, 1, \cdots)$, da cui segue che $s(1/3) = \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} = 1/2$;

(ii) la definizione è coerente con la precedente, cioè s ha lo stesso valore su $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$; per esempio, se $x \in (1/3, 2/3)$, allora $a = (1, a_2, a_3, \cdots)$, $N = 1$ e $b = (1, 0, 0, \cdots)$, cioè $s(x) = 1/2$.

Con questa rappresentazione si può dimostrare che

$$|x - y| \leq \frac{1}{3^k} \quad \text{implica che} \quad |s(x) - s(y)| \leq \frac{1}{2^k}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ (si veda [**Fa**]).

Da questa proprietà segue che

$$|s(x) - s(y)| \leq C|x - y|^{\frac{\ln 2}{\ln 3}},$$

cioè s è hölderiana con costante $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Infatti, se k è il più grande intero tale che $|x-y| \leq \frac{1}{3^k}$, allora $\frac{1}{3^{k+1}} < |x-y|$ e quindi

$$|s(x) - s(y)| \leq \frac{1}{2^k} = e^{-k \ln 2} < e^{\ln 2 + \frac{\ln 2}{\ln 3} \ln |x-y|} = 2\ |x-y|^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

Esempio 3.5.2. Consideriamo ora la funzione

$$l(x) = s(x) + x;$$

l è strettamente crescente e continua, quindi è un omeomorfismo tra $[0,1]$ e $[0,2]$.

Inoltre

$$m\left(l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right)\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right),$$

perché l'immagine di ogni intervallo componente l'unione ha la stessa misura del intervallo stesso. Quindi, se K è l'insieme di Cantor,

$$m\left(l(K)\right) = 1,$$

perché $m\left(l\left([0,1] \setminus K\right)\right) = 1$.

Dal momento che $l(K)$ ha misura positiva, per l'esercizio 7 del Capitolo 2, esiste un sottoinsieme $E \subset l(K)$ non misurabile. Osserviamo che $l^{-1}(E) \subset K$ quindi è misurabile ed ha misura 0.

Si può allora scrivere

$$\mathcal{X}_E(x) = \mathcal{X}_{l^{-1}(E)} \circ l^{-1}(x).$$

l^{-1} è una funzione continua, $\mathcal{X}_{l^{-1}(E)}$ è una funzione misurabile, ma $\mathcal{X}_E$ non è misurabile.

Esempio 3.5.3 (Insieme misurabile che non è un boreliano)**.** Abbiamo visto nell'esempio precedente che, usando la scala di Cantor in modo opportuno è possibile scrivere

$$\mathcal{X}_E = f \circ g,$$

dove $\mathcal{X}_E$ non è misurabile, f è misurabile e g è continua.

Osserviamo che f non può essere una funzione boreliana, altrimenti $f \circ g$ sarebbe ancora una funzione boreliana e quindi sarebbe misurabile.

Esiste quindi una funzione f che è misurabile ma non è boreliana. Questo significa che le retroimmagini di aperti sono tutte misurabili, ma non sono tutte boreliani.

Esercizi

1. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su $\mathbb{R}^N$ definite quasi ovunque e che convergono quasi ovunque ad una funzione f. Dimostrare che f è definita quasi ovunque ed è misurabile se estesa uguale a zero dove non è definita.
2. Se $\{x \in E : f(x) \geq q\}$ è misurabile per ogni $q \in \mathbb{Q}$, allora f è misurabile.
3. Sia $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una qualunque funzione. Allora la funzione $f(x) = \liminf_{y \to x} g(y)$ è semicontinua inferiormente e quindi misurabile.

   La tesi è sempre vera se sostituiamo $\mathbb{R}$ con uno spazio topologico qualsiasi?
4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi e siano
$$\phi_\delta(x) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in (x - \delta, x + \delta)\},$$
$$\phi(x) = \inf\{\phi_\delta(x) : \delta > 0\}.$$
   Dimostrare che ϕ è superiormente semicontinua e che $\phi(x) = 0$ se e solo se f è continua in x.
5. Dimostrare l'equivalenza delle definizioni di funzione semicontinua inferiormente o superiormente date nell'Esempio 3.2.4.
6. La funzione caratteristica di un insieme E è semicontinua inferiormente se e solo se E è aperto.
7. Sia K compatto di $\mathbb{R}^N$ e sia f semicontinua inferiormente. Allora f ammette minimo in K. Che cosa succede se K è un qualsiasi spazio topologico compatto?
8. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni reali non negative su $\mathbb{R}$. Si considerino i seguenti quattro enunciati:
   a) Se f_1 e f_2 sono semicontinue superiormente, $f_1 + f_2$ è semicontinua superiormente.
   b) Se f_1 e f_2 sono semicontinue inferiormente, $f_1 + f_2$ è semicontinua inferiormentei.
   c) Se ogni f_n è semicontinua superiormente, $\sum_1^\infty f_n$ è semicontinua superiormente.
   d) Se ogni f_n è semicontinua inferiormente, $\sum_1^\infty f_n$ è semicontinua inferiormente.

   Si provi che tre di questi enunciati sono veri e uno è falso. Cosa succede se si omette la condizione di non negatività?
9. La funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{se } x = p/q \text{ con } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ primi tra loro}, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

è semicontinua superiormente.

10. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è semicontinua inferiormente se e solo se
$$f(x) = \sup\{g(x) \,:\, g \in C[a, b],\, g \leq f \;\text{ su }\; [a, b]\}.$$
per ogni $x \in [a, b]$.
11. Sia f una funzione continua di una variabile reale e sia E un insieme di numeri reali di misura di Lebesgue nulla. È sempre vero che $m(f(E)) = 0$?
12. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme misurabile di misura finita e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile.

    Dimostrare che f è quasi ovunque finita in E se e solo se f è *quasi limitata in E*, nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un chiuso $K \subseteq E$ ed una costante $c > 0$ tali che
$$|f| \leq c \;\text{ in }\; K \;\text{ e }\; m(E \setminus K) < \varepsilon.$$

Capitolo 4

L'integrale di Lebesgue

4.1. Misure positive

Una *misura positiva* è una funzione definita su una σ-algebra $\mathcal{M}$ a valori in $[0, \infty]$ e *numerabilmente additiva,* cioè tale che, se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi a due a due disgiunti di $\mathcal{M}$, risulta:

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n). \tag{4.1}$$

Per evitare banalità supporremo sempre che μ sia *finita,* cioè che esista almeno un $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) < \infty$. La terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ si dice uno *spazio di misura.*

Esempio 4.1.1. Ecco alcuni esempi di spazi di misura.

(a) $X = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{M} = \sigma$-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, $\mu = m =$ misura di Lebesgue.

(b) Sia X un insieme qualunque, $\mathcal{M}$ l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di X e si definisca

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad E \text{ è infinito,} \\ \text{cardinalità di } E & \text{se} \quad E \text{ è finito;} \end{cases}$$

questa formula definisce una misura che si dice la *misura che conta* (e.g. $X = \mathbb{N}$).

(c) Sia X un insieme qualsiasi, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $x_0 \in X$ e

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_0 \in E, \\ 0 & \text{se} \quad x_0 \notin E; \end{cases}$$

la misura definita in questo modo si dice la *delta di Dirac.*

Teorema 4.1.2. *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora:*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n)$ *se* $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ *sono a due a due disgiunti;*

(iii) $E \subset F$ *implica* $\mu(E) \leq \mu(F)$ *per* $E, F \in \mathcal{M}$;

(iv) se $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ *è una successione crescente (i.e* $E_n \subseteq E_{n+1}$ *per* $n \in \mathbb{N}$*) di insiemi misurabili, risulta che*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big);$$

(v) se $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ *è una successione decrescente (i.e* $E_n \supseteq E_{n+1}$ *per* $n \in \mathbb{N}$*) di insiemi misurabili, risulta che*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \quad \textit{se} \quad \mu(E_1) < \infty.$$

Dimostrazione. (i) Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) < \infty$ e si ponga $E_1 = E$ e $E_k = \varnothing$ per $k = 2, 3, \ldots$ in (4.1).

(ii) Si ponga $E_k = \varnothing$ per $k = n+1, n+2, \ldots$ in (4.1).

(iii) Poiché $F = E \cup (F \setminus E)$ e $E \cap (F \setminus E) = \varnothing$, (ii) implica che $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.

(iv) Sia $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, allora $E_n \subseteq E$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $\mu(E_n) \leq \mu(E)$. Se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_n) = \infty$ si ha anche $\mu(E) = \infty$ e quindi la tesi. Altrimenti si pone $F_1 = E_1$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ e si ha

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\Big) = \\ &\lim_{n\to\infty} \mu(E_n).\end{aligned}$$

(v) Per la (iv)

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \setminus E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_1 \setminus E_n)\Big) = \mu\Big(E_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)$$

e quindi

$$\mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \setminus E_n) = \mu(E_1) - \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big),$$

da cui si conclude poiché $\mu(E_1) < \infty$. □

Esempio 4.1.3. Se $\mu(E_1) = \infty$ allora in generale l'asserzione (v) del Teorema 4.1.2 non vale. Infatti, se $E_n = [n, +\infty), n \in \mathbb{N}$, e μ è la misura di Lebesgue m, si ha $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varnothing$, $E_n \supseteq E_{n+1}$ e $m(E_n) = \infty, n \in \mathbb{N}$.

4.2. Misure esterne

Una *misura esterna* μ_e su un insieme X è una funzione definita sull'insieme delle parti di X a valori in $[0, \infty]$ tale che

(i) $\mu_e(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu_e(E) \leq \mu_e(F)$ se $E \subseteq F$;

(iii) $\mu_e\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_e(E_n)$ per ogni successione di sottoinsiemi E_n di X.

Le misure esterne permettono di costruire della misure, perchè esiste sempre una σ-algebra sulla quale si comportano come misure.

Un sottoinsieme E di X si dice μ_e*-misurabile* se decompone additivamente ogni sottoinsieme di X, cioè se

$$\mu_e(F) = \mu_e(F \cap E) + \mu_e(F \setminus E),$$

per ogni $F \subset X$.

Si noti che, dato che $F = (F \setminus E) \cup (F \cap E)$, per la (iii) vale sempre la disuguaglianza $\mu_e(F) \leq \mu_e(F \cap E) + \mu_e(F \setminus E)$.

Teorema 4.2.1 (Carathéodory)**.** *Sia μ_e una misura esterna. La collezione $\mathcal{M}$ di insiemi μ_e-misurabili è una σ-algebra e la restrizione di μ_e a $\mathcal{M}$ è una misura. Inoltre, se $\mu_e(E) = 0$, allora E è μ_e-misurabile.*

Dimostrazione. È chiaro che $\varnothing \in \mathcal{M}$.

Se $E \in \mathcal{M}$, allora

$$\mu_e(F) = \mu_e(F \cap E) + \mu_e(F \setminus E) = \mu_e(F \setminus E^c) + \mu_e(F \cap E^c),$$

quindi $E^c \in \mathcal{M}$.

Facciamo ora vedere che, se E_1 ed E_2 sono elementi di $\mathcal{M}$, anche l'unione $E_1 \cup E_2$ appartiene ad $\mathcal{M}$. Applichiamo per questo la definizione alle coppie di insiemi F, E_1 e $F \setminus E_1, E_2$; otteniamo:

$$\mu_e(F) = \mu_e(F \cap E_1) + \mu_e(F \setminus E_1),$$
$$\mu_e(F \setminus E_1) = \mu_e((F \setminus E_1) \cap E_2) + \mu_e((F \setminus E_1) \setminus E_2),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mu_e(F) \quad &= \quad \mu_e(F \cap E_1) + \mu_e((F \setminus E_1) \cap E_2) + \mu_e((F \setminus E_1) \setminus E_2) \geq \\ &\quad\quad \mu_e((F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu_e(F \setminus (E_1 \cup E_2)), \end{aligned}$$

dato che $(F \cap E_1) \cup ((F \setminus E_1) \cap E_2) = F \cap (E_1 \cup E_2)$. La disuguaglianza opposta è sempre vera. Per induzione è chiaro inoltre che, se $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$, anche $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{M}$.

Facciamo ora vedere che, se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ e gli E_n sono a due a due disgiunti, allora

$$\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(F \cap E_n)$$

per ogni $F \subset X$. In particolare, si avrà che

$$\mu_e\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(E_n),$$

e cioè che μ_e è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$.

Cominciamo a dimostrare per induzione che

$$\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap E_i).$$

È chiaro che questa è soddisfatta per $n = 1$. Sia $F_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ e supponiamo che

$$\mu_e(F \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap E_i);$$

risulta:

$$\begin{aligned}
\mu_e(F \cap F_{n+1}) \quad = \quad & \mu_e(F \cap F_{n+1} \cap F_n) + \mu_e((F \cap F_{n+1}) \setminus F_n) = \\
& \mu_e(F \cap F_n) + \mu_e((F \cap (F_{n+1}) \setminus F_n)) = \\
& \sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap E_i) + \mu_e((F \cap E_{n+1}) = \\
& \sum_{i=1}^{n+1} \mu_e(F \cap E_i).
\end{aligned}$$

Infine, si ha:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(F \cap E_n) \quad \geq \quad & \mu_e\Big(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \geq \mu_e\Big(F \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \\
& \sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap E_i)
\end{aligned}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi la tesi. Nell'ultima catena di disuguaglianze, la prima segue dalla subadditività di μ_e, mentre la seconda dalla sua monotonia.

Siamo ora in grado di concludere la dimostrazione facendo vedere che, se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, anche $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$. Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$ e posto $F_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, si ha che sia $F_n \in \mathcal{M}$ che $F_n \setminus F_{n-1} \in \mathcal{M}$ e quindi

$$\begin{aligned}\mu_e(F) &= \mu_e(F \cap F_n) + \mu_e(F \setminus F_n) \geq \\ &\mu_e(F \cap F_n) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \\ &\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{i=1}^{n} (F_i \setminus F_{i-1})\Big) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \\ &\sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap (F_i \setminus F_{i-1})) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big).\end{aligned}$$

Facendo tendere n all'infinito, si ottiene perciò:

$$\begin{aligned}\mu_e(F) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(F \cap (F_n \setminus F_{n-1})) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \\ &\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus F_{n-1}))\Big) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \\ &\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big),\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che gli insiemi $F_n \setminus F_{n-1}$ sono a due a due disgiunti. Come al solito, la disuguaglianza contraria è sempre verificata. □

Sia (X, d) uno spazio metrico. Una misura esterna su X si dice una *misura di Caratheodory* se

$$\mu_e(E \cup F) = \mu_e(E) + \mu_e(F),$$

per ogni coppia di insiemi E, F tali che $d(E, F) > 0$.

Proposizione 4.2.2. *Se μ_e è una misura esterna di Caratheodory su (X, d), allora i boreliani sono μ_e-misurabili.*

Esempio 4.2.3 (La misura di Hausdorff)**.** Sia $X = \mathbb{R}^N$ con la distanza euclidea. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dice che $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ è un δ-ricoprimento di E se $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ e $0 \leq \operatorname{diam}(U_i) \leq \delta$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $0 \leq s < \infty$ e $0 < \delta \leq \infty$. Poniamo:

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left[\frac{\operatorname{diam}(U_i)}{2}\right]^s : \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } E \right\},$$

dove

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}, \quad \Gamma(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}.$$

(Si noti che se s è intero, $\alpha(s)$ non è altro che il volume della pallina unitaria s-dimensionale.)

Poiché la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$ è decrescente, dato che ogni δ-ricoprimento è anche un δ'-ricoprimento se $\delta < \delta'$, allora possiamo definire

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

Si dice che $\mathcal{H}^s$ è la *misura di Hausdorff s-dimensionale* su $\mathbb{R}^N$; si può dimostrare che $\mathcal{H}^s_\delta$ ed $\mathcal{H}^s$ hanno le seguenti proprietà :

(i) $\mathcal{H}^s_\delta$ e $\mathcal{H}^s$ sono misure esterne;

(ii) $\mathcal{H}^s$ è una misura di Caratheodory, quindi i boreliani sono misurabili secondo $\mathcal{H}^s$;

(iii) $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta i punti di $\mathbb{R}^N$;

(iv) $\mathcal{H}^N = m$ su $\mathbb{R}$, la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^N$;

(v) $\mathcal{H}^s \equiv 0$ su $\mathbb{R}^N$ per ogni $s > N$;

(vi) $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$ per ogni $\lambda > 0$ ed $E \subset \mathbb{R}^N$;

(vii) $\mathcal{H}^s(L(E)) = \mathcal{H}^s(E)$ per ogni isometria L di $\mathbb{R}^N$.

Si può anche dimostrare che, se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e, se $0 \le s < t < \infty$, allora $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ implica che $\mathcal{H}^t(E) = 0$ o, in altre parole, $\mathcal{H}^t(E) > 0$ implica che $\mathcal{H}^s(E) = \infty$.

La *dimensione di Hausdorff* di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è allora definita da

$$\dim_H(E) = \inf \left\{ 0 \le s < \infty \;\middle|\; \mathcal{H}^s(E) = 0 \right\}.$$

4.3. Integrale di Lebesgue di funzioni non-negative

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $s : X \to [0, +\infty)$ una funzione semplice, cioè

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathcal{X}_{E_i}$$

con $c_i \ge 0$, $i = 1, \dots k$, $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = X$ e $E_i \cap E_j = \varnothing$ per $i \ne j$.

Se $E \in \mathcal{M}$ è misurabile, si pone per definizione:

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E \cap E_i),$$

dove si intende $c_i \mu(E \cap E_i) = 0$ se $c_i = 0$, anche se $\mu(E \cap E_i) = \infty$.

Sia $f : X \to [0, \infty]$ misurabile; l'*integrale (di Lebesgue) di f su E* (rispetto alla misura μ) è definito da

$$\int_E f\,d\mu = \sup\left\{\int_E s\,d\mu : s \text{ semplice }, 0 \le s \le f \text{ in } E\right\}.$$

Se l'integrale di f è finito, si dice che f è *sommabile in E*.

Esempio 4.3.1. (i) Sia $\mu = \delta_{x_0}$, la delta di Dirac concentrata in $x_0 \in X$. Se $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{X}_{E_j}$ è una funzione semplice, allora x_0 appartiene ad un solo E_j, cioè $\mu(E_j) = 0$ se $j \neq i$ e $\mu(E_i) = 1$; quindi

$$\int_X s\ d\mu = c_i = s(x_0).$$

Se f è misurabile e non-negativa, si ha dunque

$$\int_X f d\mu = \sup\{s(x_0) : s \text{ semplice}, 0 \le s \le f\} = f(x_0).$$

Una funzione è quindi sommabile se $f(x_0) < \infty$.

(ii) Se $X = I$ è un insieme qualsiasi e μ è la misura che conta allora

$$\int_I f\,d\mu = \sup\Big\{\sum_{i \in J} f(i) : J \subset I, J \text{ finito}\Big\}$$

e si scrive anche

$$\int_I f\,d\mu = \sum_{i \in I} f(i).$$

(iii) Sia $X = \mathbb{N}$ e sia μ la misura che conta. È facile dimostrare che f è sommabile se e solo se $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) < \infty$ e si ha che

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

Proposizione 4.3.2. *Siano $f, g : X \to [0, \infty]$ funzioni misurabili ed $E, F \in \mathcal{M}$.*

Allora

(i) $\int_E f\,d\mu = \int_X f\,\mathcal{X}_E\,d\mu$;

(ii) *se $f \le g$ in E, si ha* $\int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$;

(iii) *se $E \subseteq F$, si ha* $\int_E f\,d\mu \le \int_F f\,d\mu$;

(iv) *se $f = 0$ in E, si ha* $\int_E f\,d\mu = 0$;

(v) *se* $\mu(E) = 0$, *si ha* $\int_E f\, d\mu = 0$.

Dimostrazione. (i) È banale osservando che se $0 \le s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathcal{X}_{E_i} \le f$, allora

$$\int_X s\, \mathcal{X}_E\, d\mu = \int_E s\, d\mu.$$

(ii) Per ogni funzione semplice s con $0 \le s \le f$, risulta $s \le g$ e quindi

$$\int_E s\, d\mu \le \int_E g\, d\mu.$$

Passando all'estremo superiore, si ottiene la tesi.

(iii) Risulta

$$\int_E f\, d\mu = \int_X f\, \mathcal{X}_E\, d\mu \le \int_X f\, \mathcal{X}_F d\mu = \int_F f\, d\mu.$$

(iv) Ogni s semplice con $0 \le s \le f$ è nulla in E e quindi $\int_E s\, d\mu = 0$.

(v) Per ogni s semplice con $0 \le s \le f$, si ha

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E \cap E_i) = 0.$$

□

Osservazione 4.3.3. Con la (i), se $f : E \to [0, +\infty]$ è misurabile in E, possiamo definire ancora il suo integrale in X.

Lemma 4.3.4. *Siano* $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ *insiemi misurabili di* X, *a due a due disgiunti e tali che* $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Se s *è una funzione semplice non negativa, allora*

$$\int_E s\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} s\, d\mu.$$

In altre parole, la funzione $\nu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ *definita da*

$$\nu(E) = \int_E s\, d\mu, \; E \in \mathcal{M},$$

è una misura.

Dimostrazione. Come al solito, possiamo scrivere

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathcal{X}_{F_i},$$

dove $\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i = X$ e $F_i \cap F_j = \varnothing$ se $i \neq j$. Perciò

$$\begin{aligned}
\int_E s\,d\mu \quad &= \quad \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap F_i\Big) = \\
& \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap E_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E_n \cap F_i) = \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} s\,d\mu.
\end{aligned}$$

□

4.4. Teorema di Beppo Levi e lemma di Fatou

Il seguente teorema è fondamentale.

Teorema 4.4.1 (di convergenza monotona o di Beppo Levi)**.** *Sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione crescente di funzioni misurabili e non negative su* X*. Allora*

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $f : X \to [0,\infty]$ definita da $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in X$. Dato che la successione numerica $\int\limits_X f_n\,d\mu$ è crescente e $\int\limits_X f_n\,d\mu \leq \int\limits_X f\,d\mu$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu.$$

Viceversa, sia s semplice con $0 \leq s \leq f$. Fissato un numero $\alpha \in (0,1)$, poniamo $E_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}$, $n = 1, 2, \cdots$. Risulta che

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad \text{e} \quad E_n \subseteq E_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Perciò

$$\int_X f_n\,d\mu \geq \int_{E_n} f_n\,d\mu \geq \alpha \int_{E_n} s\,d\mu = \alpha\,\nu(E_n),$$

dove ν è la misura definita nel Lemma 4.3.4. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \geq \alpha \lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = \alpha\, \nu(X) = \alpha \int_X s\, d\mu.$$

per la (iv) del Teorema 4.1.2.

Passando al limite per $\alpha \to 1^-$, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \geq \int_X s\, d\mu.$$

Passando all'estremo superiore rispetto ad s, si conclude che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \geq \int_X f\, d\mu.$$

□

Osservazione 4.4.2. Applicando la Proposizione 4.3.2 (i), il teorema si può estendere a successione di funzioni misurabili in un insieme misurabile E.

Lemma 4.4.3 (Lemma di Fatou)**.** *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative su X. Allora*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Allora $g_n \leq f_n$, $g_n \leq g_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

per ogni $x \in X$.

Per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi, si ha allora

$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \quad &= \quad \int_X \lim_{n\to\infty} g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu = \\ &\liminf_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.\end{aligned}$$

□

Esempio 4.4.4. Nel lemma di Fatou, in generale, non vale il segno di uguaglianza. Sia infatti

$$f_n(x) = n\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n})}(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Allora $f_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

D'altra parte $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1 > 0 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

È chiaro che questo stesso esempio ci informa anche che il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi non vale se l'ipotesi di monotonia delle f_n viene rimossa.

Esempio 4.4.5. Il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi non vale se la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Infatti la successione $f_n(x) = \frac{1}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, converge (uniformemente) decrescendo a zero, ma

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \infty \quad \text{e} \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

A proposito di questo esempio si veda il Corollario 4.5.4.

4.5. Linearità dell'integrale di funzioni non-negative

Teorema 4.5.1. *Siano $f : X \to [0, +\infty]$ misurabile e $c \geq 0$. Allora*

$$\int\limits_X cf\,d\mu = c\int\limits_X f\,d\mu.$$

Dimostrazione. Se s è semplice e $0 \leq s \leq f$, allora cs è semplice, $0 \leq cs \leq cf$ e $cs = \sum\limits_{i=j}^{k} cc_i\mathcal{X}_{E_i}$. Perciò

$$\begin{aligned}\int\limits_X cf\,d\mu \quad &\geq \quad \int\limits_X cs\,d\mu = \sum_{i=1}^{k} cc_i\mu(E_i) = c\sum_{i=1}^{k} c_i\mu(E_i) = \\ & \quad\; c\int\limits_X s\,d\mu,\end{aligned}$$

e quindi

$$c\int\limits_X f\,d\mu \leq \int\limits_X cf\,d\mu.$$

Poiché questa disuguaglianza è valida per ogni $c > 0$ ed ogni f misurabile e non-negativa, applicandola a cf e c^{-1} al posto di f e c, rispettivamente, otteniamo

$$c^{-1}\int\limits_X cf\,d\mu \leq \int\limits_X c^{-1}cf\,d\mu = \int\limits_X f\,d\mu.$$

$\square$

Lemma 4.5.2. *Siano s e t funzioni semplici. Allora:*

$$\int_X (s+t)\,d\mu = \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu.$$

Dimostrazione. Siano $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathcal{X}_{F_i}$ e $t = \sum_{j=1}^{l} d_j \mathcal{X}_{G_j}$ e gli insiemi F_i e G_j sono a due a due disgunti rispettivamente. Si osservi che

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} F_i = \bigcup_{j=1}^{l} G_j = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{l}(F_i \cap G_j)$$

e che gli insiemi $F_i \cap G_j$ sono a due a due disgunti; inoltre

$$s + t = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(c_i + d_j)\mathcal{X}_{F_i \cap G_j}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_X (s+t)\,d\mu = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(c_i+d_j)\mu(F_i\cap G_j) = \\
\sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{l}\mu(F_i\cap G_j) + \sum_{j=1}^{l} d_j \sum_{i=1}^{k}\mu(F_i\cap G_j) = \\
\sum_{i=1}^{k} c_i\mu(F_i) + \sum_{j=1}^{l} d_j\mu(G_j) = \\
\int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.5.3. *Siano $f, g : X \to [0,\infty]$ funzioni misurabili. Allora*

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Inoltre, se ogni funzione $f_n : X \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, è misurabile, si ha che

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\,d\mu.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3.3.1, esistono due successioni crescenti di funzioni semplici non negative s_n e t_n che convergono rispettivamente ed f

e g. Per il Teorema 4.4.1 allora

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n)\,d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_X s_n\,d\mu + \int_X t_n\,d\mu\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_X t_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Infine

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} f_n\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X \sum_{n=1}^{k} f_n\,d\mu =$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_X f_n\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n\,d\mu,$$

ancora per il Teorema 4.4.1. □

Il seguente risultato è la versione del Teorema di Beppo Levi per successioni decrescenti di funzioni non negative.

Corollario 4.5.4. *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di funzioni misurabili e non negative in un insieme misurabile E e sia*

$$\int_X f_1(x)\,d\mu < \infty.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$; allora $0 \le f \le f_1$ e risulta:

$$\begin{aligned}
&\int_X f_1\,d\mu + \int_X f\,d\mu = \\
&\lim_{n\to\infty} \int_X (f_1 - f_n + f_n)\,d\mu + \int_X f\,d\mu = \\
&\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_X (f_1 - f_n)\,d\mu + \int_X f_n\,d\mu \right\} + \int_X f\,d\mu = \\
&\lim_{n\to\infty} \int_X (f_1 - f_n)\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu + \int_X f\,d\mu = \\
&\int_X (f_1 - f)\,d\mu + \int_X f\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \\
&\int_X f_1\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu,
\end{aligned}$$

dove si è applicato il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi dato che la successione $f_1 - f_n$ è crescente. Poiché f_1 è sommabile, si conclude. □

Corollario 4.5.5. *Sia $f : X \to [0,\infty]$ una funzione misurabile. Allora*

(i) *l'applicazione $\nu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ definita da*

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu, \;\; E \in \mathcal{M},$$

è una misura;

(ii) *se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente ed $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, risulta:*

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,d\mu;$$

(iii) *se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e $\int_{E_1} f\,d\mu < \infty$, risulta:*

$$\int_F f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} d\mu.$$

Dimostrazione. Esercizio 10. □

Osservazione 4.5.6. Siano $E \in \mathcal{M}$, $f : E \to [0,\infty]$ una funzione misurabile ed E_0 un insieme di misura nulla. Allora

$$\int_E f\,d\mu = \int_{E\cup E_0} f\,d\mu = \int_{E\setminus E_0} f\,d\mu.$$

È chiaro quindi che tutti i risultati fin qui dimostrati valgono se le proprietà in gioco sono verificate quasi ovunque.

Per esempio, se ogni $f_n : E \to [0, \infty]$ è definita quasi ovunque e la disuguaglianza $f_n \le f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è verificata quasi ovunque, posti

$$E_n = \{x \in E : f_n(x) \text{ non è definito}\},$$
$$F_n = \{x \in E : f_n(x) > f_{n+1}(x)\},$$

si ha che $\mu(E_n) = \mu(F_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Posto allora $Z = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cup F_n)$, risulta che $\mu(Z) = 0$ e che ogni f_n è definita in $E \setminus Z$ ed inoltre $f_n \le f_{n+1}$ in $E \setminus Z$.

Per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi, si ha dunque

$$\int\limits_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \;=\; \int\limits_{E\setminus Z} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E\setminus Z} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \, d\mu.$$

4.6. Integrale di Lebesgue di funzioni sommabili

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Si dice che f è *sommabile in* se

$$\int\limits_X |f| \, d\mu < \infty.$$

In questo caso si pone per definizione

$$\int\limits_X f \, d\mu = \int\limits_X f^+ \, d\mu - \int\limits_X f^- \, d\mu,$$

dove $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \max(-f, 0)$. Si noti che $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ e $0 \le f^+, f^- \le |f|$.

Esempio 4.6.1. (i) La funzione di Dirichlet $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 1$ per $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ per $x \notin \mathbb{Q}$ è sommabile, perché è q.o. uguale ad 0 e

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Essa però non è integrabile secondo Riemann, perché per ogni partizione $\mathbb{P}$ di $[0, 1]$, le somme di Riemann inferiori $s(f, \mathbb{P})$ sono sempre nulle, mentre quelle superiori $S(f, \mathbb{P})$ sono sempre uguali ad 1.

(ii) La funzione $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \; x \in [0, \infty),$$

è integrabile secondo Riemann, perché

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Essa però non è sommabile, perché

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty.$$

Teorema 4.6.2. *La classe $\mathcal{L}_1(X)$ delle funzioni sommabili in X è uno spazio vettoriale. Inoltre, l'integrale di Lebesgue su X è un'applicazione lineare di $\mathcal{L}_1(X)$ in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. È chiaro che $cf \in \mathcal{L}_1(X)$ se $f \in \mathcal{L}_1(X)$ e, dato che $|f+g| \leq |f|+|g|$, se f e g sono sommabili, anche $f+g$ lo è.

Inoltre risulta:

$$(cf)^+ - (cf)^- = cf = c(f^+ - f^-) = cf^+ - cf^-$$

e quindi

$$\begin{aligned}(cf)^+ + cf^- &= (cf)^- + cf^+ \quad \text{se} \quad c>0,\\ (cf)^+ + (-c)f^+ &= (cf)^- + (-c)f^- \quad \text{se} \quad c<0.\end{aligned}$$

Trattandosi, nei due casi, di somme di funzioni positive sia a primo che a secondo membro, possiamo applicare i Teoremi 4.5.1 e 4.5.3 per ottenere

$$\begin{gathered}\int_X (cf)^+\, d\mu + c\int_X f^- d\mu = \\ \int_X (cf)^+ d\mu + \int_X cf^- d\mu = \int_X (cf)^- d\mu + \int_X cf^+ d\mu = \\ \int_X (cf)^- d\mu + c\int_X f^+ d\mu \quad \text{se} \quad c>0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\int_X (cf)^+ d\mu - c\int_X f^- d\mu = \\ \int_X (cf)^+ d\mu + \int_X (-c)f^- d\mu = \int_X (cf)^- d\mu + \int_X (-c)f^+ d\mu = \\ \int_X (cf)^- d\mu - c\int_X f^+ d\mu \quad \text{se} \quad c<0.\end{gathered}$$

Osservando che gli integrali in gioco sono tutti finiti, possiamo riordinare le due uguaglianze ottenendo comunque

$$\int_X cf\, d\mu = \int_X (cf)^+ d\mu - \int_X (cf)^- d\mu = c\int_X f^+ d\mu - c\int_X f^- d\mu = c\int_X f\ d\mu.$$

In maniera simile, dato che

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

si ha:

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^+ + f^+ + g^+.$$

Poiché tutte le funzioni in gioco sono non negative, abbiamo che

$$\int_X (f+g)^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X (f+g)^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$$

e quindi che

$$\begin{aligned}\int_X (f+g) d\mu &= \int_X (f+g)^+ d\mu - \int_X (f+g)^- d\mu = \\ &\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \\ &\int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu,\end{aligned}$$

dopo aver riordinato i termini, tutti finiti, della precedente identità. □

Corollario 4.6.3. *Se f è sommabile in X si ha:*

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \le \int_X |f|\, d\mu.$$

Dimostrazione. Risulta che

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right| \le \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f|\, d\mu,$$

per il Teorema 4.5.3. □

Proposizione 4.6.4 (Una funzione sommabile è q.o. finita)**.** *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Posto $E_\infty = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ risulta che $\mu(E_\infty) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $E_n = \{x \in X : |f(x)| \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\infty > \int_X |f|\, d\mu \ge \int_{E_n} |f|\, d\mu \ge n\, \mu(E_n)$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X |f|\, d\mu = 0.$$

Dunque $\mu(E_\infty) = 0$, dato che $E_\infty \subseteq E_n$, $n \in \mathbb{N}$. □

Proposizione 4.6.5. *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Se*

$$\int_E f\, d\mu = 0$$

per ogni $E \in \mathcal{M}$, allora $f = 0$ q.o. in X.

Dimostrazione. Sia $E_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}$. Allora E_n è misurabile e

$$\frac{1}{n}\,\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f\, d\mu = 0,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Perciò

$$\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) \leq \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = 0,$$

cioè $f \leq 0$ q.o. in X.

Scambiando f con $-f$, si ottiene che $f \geq 0$ q.o. in X. □

Teorema 4.6.6 (Assoluta continuità dell'integrale)**.** *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile in X. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\int_E |f|\, d\mu < \varepsilon \textit{ per ogni } E \in \mathcal{M} \textit{ con } \mu(E) < \delta.$$

Dimostrazione. Sia $g_n(x) = \min\{|f(x)|, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Allora g_n tende crescendo a $|f|$ q.o. in X. Per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi

$$\int_X |f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu$$

e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_X (|f| - g_\nu)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $E \subseteq X$ è misurabile e $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2\nu}$ (cioè si è scelto $\delta = \frac{\varepsilon}{2v}$), risulta:

$$\int_E |f|\, d\mu \leq \int_X (|f| - g_\nu)\, d\mu + \int_E g_\nu\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \nu\,\mu(E) < \varepsilon.$$

□

4.7. Il teorema della convergenza dominata

Esempio 4.7.1. Siano

$$\begin{aligned} &f_1(x) = \mathcal{X}_{(0,1)}(x), \\ &f_n(x) = n\,\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n})}(x) - (n-1)\,\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n-1})}(x),\ n = 2,3,\cdots. \end{aligned}$$

per $x \in \mathbb{R}$. Si ha che ogni f_n è sommabile in $\mathbb{R}$ e

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 0,\ n = 2,3,\dots \quad \text{e} \quad \int\limits_{\mathbb{R}} f_1(x)\,dx = 1,$$

per cui

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1.$$

D'altra parte,

$$\sum_{n=1}^{k} f_n(x) = k\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{k})}(x)$$

e quindi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Perciò

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,dx \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx.$$

Quindi, per funzioni sommabili di segno qualsiasi non si possono in generale scambiare le operazioni di serie e di integrale.

Esempio 4.7.2. Siano

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n+n^2x^2} \quad \text{e} \quad g_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Si osservi che

(i) f_n converge q.o. a zero in $\mathbb{R}$, ma non uniformemente;
(ii) g_n converge uniformemente a zero in $\mathbb{R}$;
(iii) $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{1+n}} \to 0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$;
(iv) $\int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \pi \nrightarrow 0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)\,dx$, anche se g_n converge uniformemente a zero!

Teorema 4.7.3 (di Lebesgue, della convergenza dominata)**.** *Siano $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, sommabili. Supponiamo che*

(i) *per quasi ogni $x \in X$*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x);$$

(ii) *esiste una funzione g sommabile in tale che*

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad \textit{per quasi ogni } x \in X \textit{ e per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

In particolare,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Dimostrazione. Dato che $|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g$ q.o. in X e $|f_n - f| \to 0$ q.o. in X, per il lemma di Fatou si ha

$$\int_X 2g \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X [2g - |f_n - f|] \, d\mu =$$

$$= \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

e quindi $\limsup\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \le 0$. Inoltre

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0 \text{ se } n \to \infty.$$

□

Osservazione 4.7.4. Nell'Esempio 4.7.2, la successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pur non convergendo uniformemente a zero, ma solo quasi ovunque, è però dominata da una funzione sommabile: $0 \le f_n(x) \le \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

La successione $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non può essere dominata da una funzione sommabile. Infatti $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ non è sommabile, essendo, per $\nu = [|x|/\sqrt{2}]$, la parte intera di $|x|/\sqrt{2}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) \ge g_\nu(x) \ge \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{|x|} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^2},$$

e quest'ultima funzione non è sommabile in $\mathbb{R}$.

Il seguente Corollario chiarifica l'Esempio 4.7.1.

Corollario 4.7.5. *Siano $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, sommabili e tali che*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Allora $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *converge assolutamente per quasi ogni* $x \in X$ *ad una funzione sommabile in* X *e risulta che*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$; per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi, g è sommabile:

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Allora g è q.o. finita in X per la Proposizione 4.6.4, cioè $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge assolutamente per quasi ogni $x \in X$.

Infine, dato che

$$\left| \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| \le \sum_{n=1}^{k} |f_n(x)| \le g(x), \ x \in X, \ k \in \mathbb{N},$$

per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3 si conclude che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu.$$

□

Una conseguenza molto utile del Teorema della Convergenza Dominata è il seguente teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Teorema 4.7.6. *Sia* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura e sia* $A \subseteq \mathbb{R}^M$ *aperto. Sia inoltre* $F : A \times X \to \mathbb{R}$ *e supponiamo che* $F(x, \cdot)$ *sia sommabile in* X *per ogni* $x \in A$ *e che* $F(\cdot, y)$ *sia di classe* $C^1(A)$ *per quasi ogni* $y \in X$.

Se esistono funzioni g_k *sommabili in* X *e tali che per ogni* $x \in A$ *e* $k = 1, \dots, N$ *risulta che*

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) \right| \le g_k(y), \ y \in X, \tag{4.2}$$

allora la funzione definita da $G(x) = \int_X F(x, y) \, d\mu(y)$ *è di classe* $C^1(A)$ *e risulta:*

$$\frac{\partial G}{\partial x_k}(x) = \int_X \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) \, d\mu(y), \ k = 1, \dots, N. \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Sia e_k il versore k-simo della base canonica di $\mathbb{R}^N$, $x \in A$ e $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una qualsiasi successione infinitesima tale che $x + h_n\, e_k \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che F è di classe C^1 nella variabile x, per il Teorema di Lagrange, abbiamo:

$$\frac{G(x + h_n\; e_k) - G(x)}{h_n} = \int_X \frac{F(x + h_n\, e_k, y) - F(x, y)}{h_n}\, d\mu(y) =$$
$$\int_X \frac{\partial F}{\partial x_k}(x + h_n\, \theta\, e_k, y)\, d\mu(y),$$

dove $\theta = \theta_n(x, y) \in (0, 1)$. Si consideri ora la successione di funzioni

$$f_n(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x + h_n\, \theta\, e_k, y),\;\; n \in \mathbb{N}.$$

La continuità di $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}$ in x implica che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) \;\text{ per ogni }\; x \in A \;\text{ e quasi ogni }\; y \in E,$$

se $n \to \infty$, mentre, per l'ipotesi (4.2), risulta che

$$|f_n(x, y)| \le g_k(y),\;\; n \in \mathbb{N}.$$

Per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3. concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x, y)\, d\mu(y) = \int_E \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y)\; d\mu(y)$$

e quindi, data l'arbitrarietà di $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che G è derivabile rispetto ad x_k e (4.3) vale.

Il fatto che $\dfrac{\partial G}{\partial x_k}$ sia continua in x segue ancora dal Teorema 4.7.3 applicato alla successione $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x_n, y)$, che è dominata da $g_k(y)$ e converge a $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x, y)$ per ogni successione di punti di $x_n \in A$ che converge ad x. □

4.8. Il teorema di Fubini-Tonelli

4.8.1. Misura di un prodotto cartesiano. Il seguente risultato è un corollario del Teorema 2.5.2 e agevolerà molto le dimostrazioni di questo paragrafo.

Lemma 4.8.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile (secondo Lebesgue).*

(i) *Esistono una successione crescente di compatti K_n contenuti in E ed una successione decrescente di aperti contenenti E tali che*

$$\lim_{n\to\infty} m(K_n) = m(E) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

(ii) *Se* $m(E) < \infty$, *allora* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq E \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *e*

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big) = m(E) = m\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Dimostrazione. (i) Per il Teorema 2.5.2, esistono aperti $B_n \supseteq E$ e compatti $H_n \subseteq E$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} m(H_n) = m(E) = \lim_{n\to\infty} m(B_n).$$

Posto $A_n = \bigcap_{j=1}^{n} B_j$ e $K_n = \bigcup_{j=1}^{n} H_j$, si ha che $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente ed inoltre $B_n \supseteq A_n \supseteq E$ e $H_n \subseteq K_n \subseteq E$. Perciò

$$\begin{aligned} m(E) \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} m(H_n) \le \lim_{n\to\infty} m(K_n) \le \\ &\quad\ \lim_{n\to\infty} m(A_n) \le \lim_{n\to\infty} m(B_n) = m(E). \end{aligned}$$

(ii) La tesi segue da (i) osservando che

$$\lim_{n\to\infty} m(K_n) = m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big)$$

e che

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big),$$

dato che $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decresce e $m(A_1) < \infty$ essendo $m(E) < \infty$. □

Teorema 4.8.2 (Misura di un prodotto cartesiano)**.** *Sia* E *misurabile in* $\mathbb{R}^N$ *e sia* F *misurabile in* $\mathbb{R}^M$. *Allora* $E \times F$ *è misurabile in* $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ *e si ha*

$$m_{N+M}(E \times F) = m_N(E)\, m_M(F). \tag{4.4}$$

Dimostrazione. In quanto segue indichiamo semplicemente con m la misura di Lebesgue m_{N+M} $(M+N)$-dimensionale.

(i) La (4.4) vale sicuramente se E ed F sono intervalli e quindi si estende facilmente al caso in cui E ed F siano plurintervalli.

(ii) Se E ed F sono aperti, allora $E \times F$ è aperto e quindi misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$. Inoltre, per il Teorema 1.3.2, esistono due successioni crescenti di plurintervalli $P_n \subseteq E$ e $Q_n \subseteq F$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} m_N(P_n) = m_N(E) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} m_M(Q_n) = m_M(F).$$

Dato che $\{P_n \times Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e $E \times F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (P_n \times Q_n)$, per il Teorema 4.1.2 e la (i) risulta:

$$\begin{aligned} m(E \times F) &= \lim_{n\to\infty} m(P_n \times Q_n) = \lim_{n\to\infty} m_N(P_n)\, m_M(Q_n) = \\ &\quad m_N(E)\, m_M(F). \end{aligned}$$

In modo analogo si procede sul caso in cui E ed F siano compatti.

(iii) Siano E ed F limitati, misurabili e di misura positiva. Per il Lemma 4.8.1, esistono due successioni decrescente di aperti $A_n \supseteq E$ e $B_n \supseteq F$ e due successioni crescenti di compatti $H_n \subseteq E$ e $K_n \subseteq F$ tali che

$$\begin{aligned} m_N(E) &= \lim_{n\to\infty} m_N(A_n) = \lim_{n\to\infty} m_N(H_n), \\ m_M(F) &= \lim_{n\to\infty} m_M(B_n) = \lim_{n\to\infty} m_M(K_n). \end{aligned}$$

Dato che $H_n \times K_n$ è un compatto contenuto in $E \times F$ e $A_n \times B_n$ è un aperto contenente $E \times F$, abbiamo che

$$\begin{aligned} m_N(H_n)\, m_M(K_n) = m(H_n \times K_n) \le m_i(E \times F) \le \\ m_e(E \times F) \le m(A_n \times B_n) = m_N(A_n)\, m_M(B_n), \end{aligned}$$

per il punto (ii) e , passando al limite per $n \to \infty$, concludiamo che $E \times F$ è misurabile dato che

$$m_i(E \times F) = m_e(E \times F) = m_N(E)\, m_M(F).$$

(iv) Se E ed F sono limitati e $m_N(E) = 0$, allora esiste una successione decrescente di aperti $A_n \supseteq E$ tali che $m_N(A_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Perciò, per ogni B aperto limitato contenente F risulta:

$$m_e(E \times F) \le m(A_n \times B) = m_N(A_n)\, m_M(B)$$

e quindi, passando al limite per $n \to \infty$, abbiamo che $m_e(E \times F) = 0$ e cioè $E \times F$ è misurabile ed ha misura nulla.

(v) Per k intero, sia $Q_k(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^k : |x_i| \le r, i = 1, \dots, k\}$. Se E ed F sono misurabili e non limitati, si ha che $(E \times F) \cap Q_{M+N}(0, r) = (E \cap Q_N(0, r)) \times (F \cap Q_M(0, r))$ è misurabile per ogni $r > 0$ e risulta:

$$E \times F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap Q_N(0, n)) \times (F \cap Q_M(0, n)).$$

Perciò $E \times F$ è misurabile e

$$\begin{aligned} m(E \times F) &= \lim_{n\to\infty} m((E \times F) \cap Q_{M+N}(0, n)) = \\ &\quad \lim_{r\to\infty} m_N(E \cap Q_N(0, n))\, m_M(F \cap Q_M(0, n)) = \\ &\quad m_N(E)\, m_M(F). \end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 4.8.3. Se $m_N(E) = 0$, allora

$$m(E \times \mathbb{R}^M) = \lim_{r\to\infty} m(E \times Q_M(0, r)) = 0.$$

Quindi, per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^M$, *anche se non misurabile*, si ha

$$m_e(E \times F) \leq m_{N+M}(E \times \mathbb{R}^M) = 0.$$

Teorema 4.8.4. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ed $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili.*

(i) *L'epigrafico di f,*

$$\mathcal{G} = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : t < f(x)\},$$

è misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$ e la funzione $F : E\times\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $F(x, t) = f(x) - t$ è misurabile.

(ii) *Se $f \geq 0$, gli insiemi*

$$\mathcal{R}_f = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\} \quad e$$
$$\mathcal{R}^*_f = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t \leq f(x)\}$$

sono misurabili in $\mathbb{R}^{N+1}$ e

$$m_{N+1}(\mathcal{R}_f) = m_{N+1}(\mathcal{R}^*_f) = \int_E f(x)dx.$$

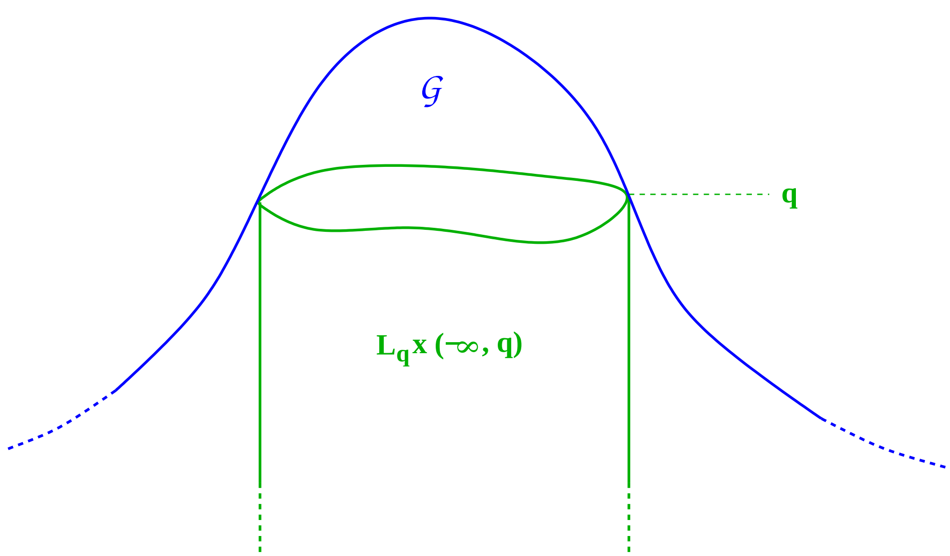

Figura 1. Epigrafico come unione numerabile

Dimostrazione. (i) Risulta che

$$\mathcal{G} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} L_q \times (-\infty, q)$$

dove $L_q = \{x \in E : f(x) > q\}$. Per il Teorema 4.8.2, ogni $L_q \times (-\infty, q)$ è misurabile e quindi $\mathcal{G}$ è misurabile, perché unione numerabile di insiemi misurabili.

Inoltre

$$\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : F(x,t) > s\} = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) - s > t\}$$

è misurabile per ogni $s \in \mathbb{R}$, essendo l'epigrafico della funzione misurabile $x \mapsto f(x) - s$.

(ii) È chiaro che $\mathcal{R}_f$ ed $\mathcal{R}_f^*$ sono misurabili (per esempio, $\mathcal{R}_f = \mathcal{G} \cap (\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$. Sia ora $s = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{E_i}$ una funzione semplice in $\mathbb{R}^N$. Allora

$$\mathcal{R}_s = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < s(x)\} = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap E_i) \times (0, c_i)$$

e quindi

$$\begin{aligned} m_{N+1}(\mathcal{R}_s) &= \sum_{i=1}^{n} m_{N+1}((E\cap E_i) \times (0,c_i)) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, m_N(E\cap E_i) = \\ &\int\limits_E s(x)dx. \end{aligned}$$

Dato che $f \geq 0$, per il Teorema 3.3.1, esiste una successione crescente di funzioni semplici s_n su $\mathbb{R}^N$ che converge puntualmente ad $f\,\mathcal{X}_E$. Allora si ha che $\mathcal{R}_f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_{s_n}$ e $\mathcal{R}_{s_n} \subseteq \mathcal{R}_{s_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$m_{N+1}(\mathcal{R}_f) = \lim_{n\to\infty} m_{N+1}(\mathcal{R}_{s_n}) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E s_n(x)\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx$$

per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi.

Dato che $\mathcal{R}_f^* \subseteq \mathcal{R}_{\alpha f}$ per ogni $\alpha > 1$, si ottiene infine

$$\int\limits_E f(x)\,dx = m_{N+1}(\mathcal{R}_f) \leq m_{N+1}(\mathcal{R}_f^*) \leq m_{N+1}(\mathcal{R}_{\alpha f}) = \alpha \int\limits_E f(x)\,dx$$

e quindi anche $m_{N+1}(\mathcal{R}_f^*) = \int\limits_E f(x)dx$. $\square$

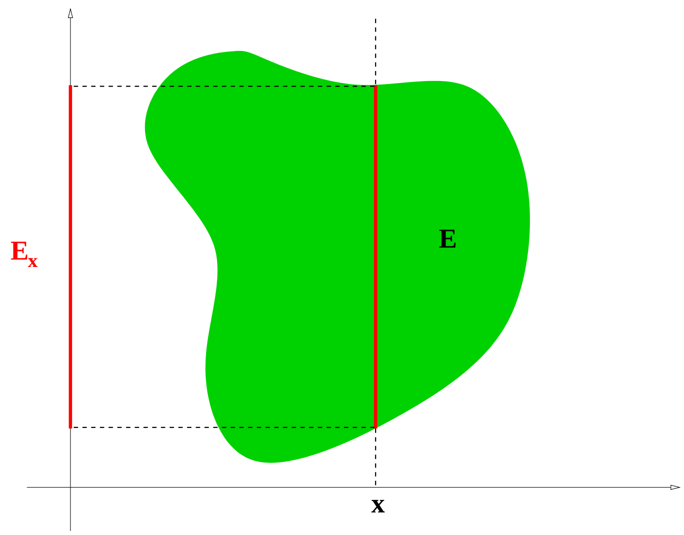

Figura 2. Sezione di un insieme E.

4.8.2. Il teorema delle sezioni.

Teorema 4.8.5 (delle sezioni)**.** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ misurabile. Allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$, l'insieme*

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^M : (x, y) \in E\}$$

è misurabile. Inoltre la funzione $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto m_M(E_x)$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$ e risulta che

$$m_{N+M}(E) = \int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)\, dx.$$

Dimostrazione. Come fatto nel Teorema 4.8.2, per semplicità di notazione, indicheremo con m la misura m_{N+M}.

(i) Il teorema è ovvio se E è un intervallo o un plurintervallo.

(ii) Se E è un aperto, per il Teorema 1.3.2, esiste una successione crescente di plurintervalli $P^{(n)}$ tali che

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} m(P^{(n)}) = m(E).$$

L'insieme E_x è aperto in $\mathbb{R}^M$ (e perciò misurabile) ed è l'unione di tutti i plurintervalli $P_x^{(n)}$ e quindi $m_M(E_x) = \lim\limits_{n \to \infty} m_M(P_x^{(n)})$.

Inoltre, la funzione $x \mapsto m_M(E_x)$ è misurabile, perché limite di funzioni misurabili. Infine, per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi, il passo (i) ed il

Teorema 4.1.2, si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} m_M(P_x^{(n)})\,dx = \lim_{n\to\infty} m(P^{(n)}) = m(E).$$

(iii) Se $m(E)=0$ esiste una successione decrescente di aperti $A^{(n)}$ contenenti E tale che $\lim\limits_{n\to\infty} m(A^{(n)})=0$. Per il passo (ii), ogni $x\mapsto m_M(A_x^{(n)})$ è misurabile e quindi anche $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} m_M(A_x^{(n)})$ è misurabile. Per il lemma di Fatou 4.4.3 ed il passo (ii) inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx \le \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} m_M(A_x^{(n)})\,dx = \lim_{n\to\infty} m(A^{(n)}) = 0.$$

Ciò significa che $f=0$ q.o. in $\mathbb{R}^N$ e, dato che $E_x\subseteq A_x^{(n)}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, allora

$$m_N(E_x)\le \lim_{n\to\infty} m_N(A_x^{(n)}) = f(x) = 0$$

per quasi ogni $x\in\mathbb{R}^N$.

Dunque $\int\limits_{\mathbb{R}^N} m_N(E_x)\,dx = 0 = m(E)$.

(iv) Se $m(E)<\infty$, per il Teorema 2.5.2, esiste una successione decrescente di aperti $A^{(n)}$ con $m(A^{(1)})<\infty$ tale che

$$m(E)=\lim_{n\to\infty} m(A^{(n)}).$$

Inoltre

$$E=\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}\right)\setminus Z \quad\text{con}\quad m(Z)=0.$$

Dato che

$$E_x=\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_x^{(n)}\right)\setminus Z_x$$

per $x\in\mathbb{R}^N$ e che $m_M(Z_x)=0$ per quasi ogni $x\in\mathbb{R}^N$ per la (iii), allora E_x è misurabile per quasi ogni $x\in\mathbb{R}^N$. Inoltre $m_M(A_x^{(1)})<\infty$ per q.o. $x\in\mathbb{R}^N$, dato che

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_M(A_x^{(1)})\,dx = m(A^{(1)})<\infty.$$

Quindi

$$m_M(E_x)=m_M\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_x^{(n)}\Big)=\lim_{n\to\infty} m_M(A_x^{(n)})$$

e dunque $x\mapsto m_M(E_x)$ è misurabile.

Infine

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} m_M(A_x^{(n)})\,dx = \lim_{n\to\infty} m(A^{(n)}) = m(E).$$

(v) Se E è misurabile, si pone $E^{(n)} = E \cap Q_{N+M}(0,n)$ e si conclude in modo completamente analogo a prima, sfruttando la monotonia della successione $\{E^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi. □

Corollario 4.8.6. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora f è misurabile se e solo se il suo epigrafico è misurabile.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.8.4, resta da dimostrare che f è misurabile se è misurabile $\mathcal{G} = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : t < f(x)\}$.

Per il Teorema 4.8.5, per q.o. $t \in \mathbb{R}^N$ la sezione $\mathcal{G}_t = \{x \in E : t < f(x)\} = L_+(f,t)$ è misurabile. D'altra parte, l'insieme dei t tali che $\mathcal{G}_t$ è misurabile è denso in $\mathbb{R}$ (altrimenti il suo complementare non avrebbe misura nulla, contenendo un aperto).

Perciò, per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste una successione di valori $t_n > t$ convergenti a t e tali che ogni $\mathcal{G}_{t_n}$ è misurabile; dunque l'insieme di livello

$$L_+(f,t) = \mathcal{G}_t = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{t_n}$$

è misurabile. □

Siamo ora in grado di mettere in relazione l'integrale di Riemann con quello di Lebesgue.

Corollario 4.8.7. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e misurabile secondo Peano-Jordan e sia $f : E \to \mathbb{R}$ limitata ed integrabile secondo Riemann.*

Allora f è sommabile in E ed il suo integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann.

Dimostrazione. Si dimostra prima per $f \geq 0$ e poi si estende osservando che $f = f^+ - f^-$.

Abbiamo già dimostrato che E è anche misurabile secondo Lebesgue. Inoltre l'insieme $\mathcal{R}_f$ è misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^{N+1}$ perché misurabile secondo Peano-Jordan. Per il Corollario 4.8.6, f è misurabile.

Infine, l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue di f sono uguali tra loro, perché il primo è uguale alla misura di Peano-Jordan di $\mathcal{R}_f$, mentre il secondo è uguale a quella di Lebesgue, che sono tra loro uguali. □

4.8.3. Il teorema di Fubini-Tonelli. Le osservazioni fatte sull'insieme $\mathcal{R}_f$ ed Il Teorema 4.8.5 ci permettono di dimostrare uno dei risultati più importanti di questo corso.

Teorema 4.8.8 (Fubini-Tonelli). *Sia $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile.*

(i) Se $f \geq 0$, allora la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^M$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$, la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)\, dy$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$ e si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)\, dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x, y)\, dxdy. \tag{4.5}$$

(ii) Se f è sommabile, allora la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^M$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$, la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x, y) dy$ è sommabile in $\mathbb{R}^N$ e vale ancora la (4.5).

Dimostrazione. (i) Sia $\mathcal{R} = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x, y)\}$; per il Teorema 4.8.4, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x, y)\, dxdy = m_{N+M+1}(\mathcal{R}). \tag{4.6}$$

Per il Teorema 4.8.5, $\mathcal{R}_x = \{(y, t) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x, y)\}$ è misurabile per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ e quindi la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^M$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$, per il Corollario 4.8.6. Per il Teorema 4.8.5 allora la funzione $x \mapsto m_{M+1}(\mathcal{R}_x)$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$, il che vuol dire che $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)\, dy$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$.

Infine

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)\, dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^N} m_{M+1}(\mathcal{R}_x)\, dx =$$

$$m_{N+M+1}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x, y)\, dxdy,$$

sempre per il Teorema 4.8.5.

(ii) Dato che $f = f^+ - f^-$, basta dimostrare la tesi quando $f \geq 0$ ed f sommabile.

Per quanto dimostrato in (i), vale la (4.5) ed, inoltre, il secondo membro di (4.5) è finito, poiché f è sommabile. Ne segue che $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)\, dy$ è una funzione sommabile in $\mathbb{R}^N$ e, quindi, finita per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$.

Dunque la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è sommabile per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$. $\square$

Concludiamo questo paragrafo enunciando una versione del Teorema di Fubini-Tonelli per spazi di misura prodotto; per una dimostrazione si veda [**Ru**].

Si dice che uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è *σ-finito* se esiste una successione di insiemi $E_n \in \mathcal{M}$ di misura $\mu(E_n)$ finita la cui unione è uguale a

X. Se inoltre $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ sono due spazi di misura σ-finiti, si indica con $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ la più piccola σ-algebra contenente tutti prodotti cartesiani di insiemi di $\mathcal{M}_1$ con insiemi di $\mathcal{M}_2$. Con un'opportuna definizione della misura $\mu_1 \times \mu_2$, la terna $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ è uno spazio di misura e vale il seguente analogo del Teorema di Fubini-Tonelli.

Teorema 4.8.9. *Siano $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ due spazi di misura σ-finiti e sia f una funzione misurabile su $X_1 \times X_2$ rispetto alla σ-algebra $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$.*

(i) Se $f : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty]$, allora le funzioni $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y)\, d\mu_2$ e $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y)\, d\mu_1$ sono, rispettivamente $\mathcal{M}_1$- $\mathcal{M}_2$-misurabili ed i seguenti tre integrali sono uguali (anche se infiniti):

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2), \quad \int\limits_{X_1} \Big(\int\limits_{X_2} f\, d\mu_2 \Big) d\mu_1, \quad \int\limits_{X_2} \Big(\int\limits_{X_1} f\, d\mu_1 \Big) d\mu_2.$$

(ii) Se f è sommabile in $X_1 \times X_2$, le funzioni $x \mapsto f(x, y)$ e $y \mapsto f(x, y)$ sono sommabili, rispettivamente, per quasi ogni $y \in X_2$ e per quasi ogni $x \in X_1$, le funzioni $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y)\, d\mu_2$ e $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y)\, d\mu_1$ sono sommabili nei rispettivi spazi ed i tre integrali rimangono uguali.

Esercizi

1. Calcolare la dimensione di Hausdorff dell'insieme $\mathbb{Q}$.
2. Costruire un sottoinsieme di $[0, 1]$ com dimensione di Hausdorff maggiore di $\ln 2/ \ln 3$ e minore di 1.
3. Sia $s : [0, 1] \to [0, 1]$ la scala di Cantor. Calcolare
$$\int_0^1 s(x)\, dx.$$
4. Mostrare che il
$$\lim_{a \to +\infty} \int\limits_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx$$
converge. Dimostrare poi che
$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^+ dx = +\infty,$$
sia nel senso di Riemann che di Lebesgue.
5. Siano f_n misurabili e non negative in E tali che f_n converge ad una funzione f sommabile in E e
$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n\, dx = \int_E f\, dx.$$

Provare che per ogni sottoinsieme misurabile F di E si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int_F f_n \, dx = \int_F f \, dx.$$

Vale lo stesso risultato se si rimuove l'ipotesi $f_n \geq 0$?

6. (Teorema della Convergenza Dominata Generalizzato.) Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni di funzioni misurabili su X tali che
   (i) f_n converge ad una funzione misurabile f q.o. su X se $n \to \infty$;
   (ii) ogni g_n è sommabile su X e g_n converge q.o. ad una funzione g sommabile su X se $n \to \infty$;
   (iii) $|f_n| \leq g_n$ q.o. su X per ogni $n \in \mathbb{N}$;
   (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.
   Allora risulta che
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

7. Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile, e siano f_n le funzioni troncate
$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
   Allora,
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx.$$

8. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \overline{R}$ sommabile e siano $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$. Dimoatrare le formule:
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x + x_0) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \, dx \quad \text{e}$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda x) \, dx = \lambda^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \, dx.$$

9. Sia f_n una successione di funzioni misurabili tali che $f_n \to f$ q.o. in E misurabile. Se $|f_n(x)|^p \leq g(x)$ con $p \geq 1$ e g sommabile, allora
$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0.$$

10. Dimostrare il Corollario 4.5.5.

11. Osservare che se H è un insieme misurabile contenuto in $[0, 1] \times [0, 1]$ allora le sezioni verticali $H_x = \{y \in [0, 1] : (x, y) \in H\}$ sono misurabili per quasi ogni $x \in [0, 1]$. Vale il viceversa?

12. Sia f non negativa, misurabile in $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile. Allora
$$\int_E f = \int_0^\infty m_f(t)\, dt,$$
dove $m_f(t)$ è la misura di Lebesgue dell'insieme $\{x \in E : f(x) > t\}$.
13. Calcolare l'integrale di Lebesgue
$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$
e poi calcolare
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$
14. Calcolare il volume di una palla di raggio r in $\mathbb{R}^4$ e quello dell'ellissoide
$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \sum_{i=1}^5 \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 \le 1 \right\},$$
dove i numeri a_i sono positivi.
15. Sia D il dominio normale $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$, dove $\alpha, \beta : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ sono sommabili e sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile in D. Dimostrare la formula di riduzione:
$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$
16. Dimostrare che se $[a, b]$ è un intervallo limitato e se $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ è limitata ed integrabile secondo Riemann, allora l'insieme
$$\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$
è misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$ secondo Peano-Jordan.

Capitolo 5

Spazi di Hilbert

In questo capitolo svilupperemo le proprietà principali di uno spazio di Hilbert su $\mathbb{R}$, lasciando per esercizio le facili modifiche che si rendono necessarie per uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$.

5.1. Spazi di Hilbert

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$). Un *prodotto interno o scalare* su V è un'applicazione $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ (oppure $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$) con le seguenti proprietà:

(i) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ per ogni u, v e $w \in V$;

(ii) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ per ogni $u, v \in V$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ (oppure $\alpha \in \mathbb{C}$;)

(iii) $(v, u) = (u, v)$ (oppure $(v, u) = \overline{(u, v)}$) per ogni $u, v \in V$;

(iv) $(u, u) \geq 0$ per ogni $u \in V$ e $(u, u) = 0$ se e solo se $u = 0$.

Il prodotto interno $(\cdot,\cdot)$ definisce la norma $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$.

Teorema 5.1.1. *Sia V uno spazio vettoriale con prodotto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Allora risulta:*

(i) *(disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)*

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\| \text{ per ogni } u, v \in V$$

ed il segno di uguaglianza vale se e solo se u e v sono proporzionali;

(ii) *(identità del parallelogramma)*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \text{ per ogni } u, v \in V.$$

Dimostrazione. (i) La disuguaglianza è sicuramente vera se $u = 0$ o $v = 0$. Se invece $u, v \neq 0$, risulta che

$$0 \leq \left\| \frac{u}{\|u\|} \pm \frac{v}{\|v\|} \right\|^2 = 1 + 1 \pm 2\, \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$$

e la disuguaglianza segue senz'altro. Da questa stessa formula è chiaro anche che vale il segno di uguaglianza se e solo se u e v sono proporzionali.

(ii) Ancora dalla bilinearità del prodotto scalare otteniamo:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,(u,v) + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\,(u,v) + \|v\|^2$$

e quindi l'identità voluta. □

Uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno è quindi uno spazio normato e dunque uno spazio metrico; nel caso in cui esso sia completo rispetto alla norma indotta dal prodotto interno, si dirà che esso è uno *spazio di Hilbert* e si indicherà con la lettera $\mathcal{H}$.

Esempio 5.1.2. (1) Lo spazio $\mathbb{R}^N$ con il prodotto definito da

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{N} x_n\, y_n,\;\; x, y \in \mathbb{R}^N,$$

è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{R}$. Un altro prodotto scalare rispetto al quale $\mathbb{R}^N$ è uno spazio di Hilbert è il seguente:

$$(x,y)_A = (Ax, y),\;\; x, y \in \mathbb{R}^N,$$

dove A è una matrice $N \times N$ simmetrica e definita positiva.

(2) Lo spazio $\mathbb{C}^N$ con il prodotto interno definito da

$$(z,w) = \sum_{n=1}^{N} z_n\, \overline{w}_n,\;\; x, y \in \mathbb{C}^N,$$

è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$.

(3) Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Vedremo nel Capitolo 6 che l'insieme

$$L^2(X,\mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}}, f \text{ misurabile con } f^2 \text{ sommabile in } X\},$$

in cui si identificano le funzioni che differiscono tra loro in un insieme di misura nulla, è uno spazio di Hilbert sui reali rispetto al prodotto:

$$(f,g) = \int_X f\, g\, d\mu.$$

Scegliendo $X = \mathbb{N}$ e $\mu =$ misura che conta, otteniamo lo spazio

$$\ell^2 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 < \infty\}, \quad (x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n\, y_n.$$

(4) In modo analogo si definisce lo spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$:

$$L^2_{\mathbb{C}}(X,\mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{C}}, f \text{ misurabile con } |f|^2 \text{ sommabile in } X\},$$

con

$$(f,g) = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu.$$

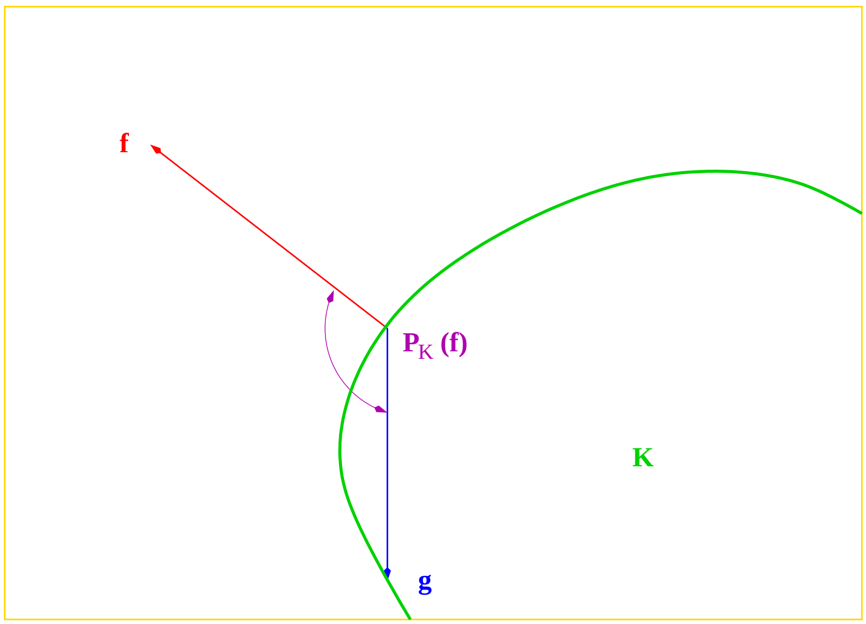

Figura 1. Proiezione su un sottoinsieme chiuso e convesso.

Teorema 5.1.3 (della proiezione)**.** *Sia $\mathcal{C}$ un sottoinsieme non vuoto, convesso e chiuso in $\mathcal{H}$.*

Allora, per ogni $u \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{C}$ esiste un unico $v \in \mathcal{C}$ tale che

$$\|u - v\| = \inf\{\|u - w\| : w \in \mathcal{C}\} = \operatorname{dist}(u, \mathcal{C}).$$

Inoltre v è caratterizzato dalla propriet a:

$$v \in \mathcal{C} \quad e \quad (u - v, w - v) \le 0 \quad pe \ ogni \ w \in \mathcal{C}.$$

Dimostrazione. Possiamo sempre supporre che $u = 0 \notin \mathcal{C}$, dato che $\mathcal{C}$ rimane non vuoto, chiuso e convesso se traslato.

Per le proprietà di estremo inferiore, esiste sempre una successione di vettori u_n tale che $\|u_n\|$ converge a $\operatorname{dist}(u, \mathcal{C})$ per $n \to \infty$. Per l'identità del parallelogramma (punto (ii) del Teorema 5.1.1) applicata ai vettori u_n e u_m, si ha:

$$\operatorname{dist}(u,\mathcal{C})^2 + \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|^2 \le \left\|\frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|^2 = \frac{\|u_n\|^2 + \|u_m\|^2}{2},$$

dato che $(u_n + u_m)/2 \in \mathcal{C}$ essendo $\mathcal{C}$ convesso. Perciò:

$$\limsup_{n,m\to\infty} \left\|\frac{u_n - u_m}{2}\right\|^2 \le \lim_{n,m\to\infty} \frac{\|u_n\|^2 + \|u_m\|^2}{2} - \operatorname{dist}(u,\mathcal{C})^2 = 0,$$

il che vuol dire che la successione degli u_n è di Cauchy.

La completezza di $\mathcal{H}$ implica che esiste $v \in \mathcal{H}$ al quale gli u_n convergono in norma per $n \to \infty$. Dato che $\mathcal{C}$ è chiuso, allora $v \in \mathcal{C}$. In conclusione,

$$\begin{aligned} \big|\operatorname{dist}(u,\mathcal{C}) - \|v\|\big| &\le \big|\operatorname{dist}(u,\mathcal{C}) - \|u_n\|\big| + \big|\|u_n\| - \|v\|\big| \le \\ &\big|\operatorname{dist}(u,\mathcal{C}) - \|u_n\|\big| + \|v_n - v\| \to 0 \ \text{ se } \ n \to \infty, \end{aligned}$$

cioè $\|v\| = \operatorname{dist}(u,\mathcal{C})$.

L'unicità di v segue direttamente dall'identità del parallelogramma; infatti, se $v' \in \mathcal{C}$ è un altro vettore tale che $\|v'\| = \operatorname{dist}(u,\mathcal{C})$, si ha che

$$\|v - v'\|^2 = 2\,\|v\|^2 + 2\,\|v'\|^2 - 4\left\|\frac{v + v'}{2}\right\|^2 \le 4\operatorname{dist}(u,\mathcal{C})^2 - 4\operatorname{dist}(u,\mathcal{C})^2 = 0,$$

dato che $(v + v')/2 \in \mathcal{C}$.

Infine, dato che per ogni $w \in \mathcal{C}$ e $t \in [0,1]$ risulta che $(1-t)v + tw \in \mathcal{C}$, abbiamo che

$$\|v\|^2 \le \|v + t(w - v)\|^2 = \|v\|^2 + 2t\,(v, w - v) + t^2\,\|w - v\|^2.$$

Sottraendo $\|v\|^2$ ad ambo i membri, dividendo per $-2t$ e facendo tendere t a 0, si ottiene quindi come voluto che $(-v, w - v) \le 0$. □

Il Teorema 5.1.3 definisce un operatore $P_{\mathcal{C}} : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ — la *proiezione* di $\mathcal{H}$ su $\mathcal{C}$ — tale che $P_{\mathcal{C}} u = v$ per ogni $u \in \mathcal{H}$.

Proposizione 5.1.4. *Sia $\mathcal{C}$ un sottoinsieme non vuoto, convesso e chiuso in $\mathcal{H}$. Allora*

$$\|P_{\mathcal{C}} u_1 - P_{\mathcal{C}} u_2\| \le \|u_1 - u_2\|, \quad \textit{per ogni} \ \ u_1, u_2 \in \mathcal{H}.$$

Dimostrazione. Siano $v_1 = P_{\mathcal{C}} u_1$ e $v_2 = P_{\mathcal{C}} u_2$; si ha:

$$(u_1 - v_1, w - v_1) \le 0 \ \text{ e } \ (u_2 - v_2, w - v_2) \le 0$$

per ogni $w \in \mathcal{C}$. In particolare, ponendo $w = v_2$ nella prima disuguaglianza e $w = v_1$ nella seconda, si ottiene:

$$(u_1 - v_1, v_2 - v_1) \le 0 \ \text{ e } \ (u_2 - v_2, v_1 - v_2) \le 0,$$

da cui segue che

$$0 \ge (u_1 - v_1, v_2 - v_1) + (u_2 - v_2, v_1 - v_2) = -(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \|v_1 - v_2\|^2$$

e cioè
$$\|v_1 - v_2\|^2 \le (u_1 - u_2, v_1 - v_2) \le \|u_1 - u_2\|\|v_1 - v_2\|,$$
che è quello che basta dimostrare. $\square$

Sia $\mathcal{M}$ un sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}$. Il *complemento ortogonale* di $\mathcal{M}$ è l'insieme
$$\mathcal{M}^\perp = \{u \in \mathcal{H} : (u, v) = 0, \text{ per ogni } v \in \mathcal{M}\}.$$

Teorema 5.1.5. *Sia $\mathcal{M}$ un sottospazio vettoriale non vuoto di $\mathcal{H}$.*

(i) $\mathcal{M}^\perp$ è un sottospazio vettoriale chiuso in $\mathcal{H}$;

(ii) se $\overline{\mathcal{M}}$ è la chiusura di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{H}$, allora $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{M}}$;

(iii) $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

Dimostrazione. (i) È chiaro che $\mathcal{M}^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}$. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^\perp$ una successione convergente in $\mathcal{H}$ ad un elemento $u \in \mathcal{H}$. Allora per ogni $v \in \mathcal{M}$ risulta:
$$(u, v) = \lim_{n\to\infty} (u_n, v) = 0$$
e cioè $u \in \mathcal{M}^\perp$.

(ii) È evidente che $\mathcal{M} \subset (\mathcal{M}^\perp)^\perp$ e, poiché $(\mathcal{M}^\perp)^\perp$ è chiuso, $\overline{\mathcal{M}} \subset (\mathcal{M}^\perp)^\perp$.

Sia ora $u \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp$. Dato che $\overline{\mathcal{M}}$ è un sottospazio vettoriale chiuso, dal Teorema 6.3.8 otteniamo che
$$(u - P_{\mathcal{M}} u, w) = 0$$
per ogni $w \in \overline{\mathcal{M}}$, cioè $u - P_{\mathcal{M}} u \in \mathcal{M}^\perp$, e quindi $(u, u - P_{\mathcal{M}} u) = 0$, dato che $u \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp$.

Perciò:
$$\|u - P_{\mathcal{M}} u\|^2 = (u, u - P_{\mathcal{M}} u) - (P_{\mathcal{M}} u, u - P_{\mathcal{M}} u) = 0,$$
ossia $u = P_{\mathcal{M}} u \in \overline{\mathcal{M}}$.

(iii) Se $u \in \mathcal{H}$, abbiamo già visto che $u = P_{\mathcal{M}} u + (u - P_{\mathcal{M}} u)$ con $P_{\mathcal{M}} u \in \overline{\mathcal{M}}$ e $u - P_{\mathcal{M}} u \in \mathcal{M}^\perp$. Poiché $\overline{\mathcal{M}} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$, allora tale decomposizione è unica. $\square$

5.2. Sistemi ortonormali

Sia I un insieme di indici, non necessariamente numerabile. Un insieme $S = \{e_i\}_{i\in I}$ di vettori di $\mathcal{H}$ si dice un *sistema ortonormale* se risulta:
$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$
per ogni $i, j \in I$, dove $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Esempio 5.2.1. (1) In ℓ^2, l'insieme $S = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$e_n = (0, \dots, 0, 1_n, 0, \dots) = (\delta_{nm})_{m\in\mathbb{N}}.$$

è un sistema ortonormale.

(2) Sia $L^2(\mathbb{T})$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, misurabili e periodiche di periodo $T > 0$ e tali che $f \in L^2([0, T])$. L'insieme

$$S = \{e^{2\pi int/T}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

è un sistema ortonormale rispetto al prodotto scalare

$$(f, g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Osservazione 5.2.2 (Metodo dei minimi quadrati)**.** Dati $e_1, \dots, e_n \in S$, qual è la migliore approssimazione nella norma di $\mathcal{H}$ di un vettore $u \in \mathcal{H}$ con combinazioni lineari dei vettori $e_1, \dots, e_n$? In altre parole, ci proponiamo di minimizzare la funzione

$$f(c) = \left\| u - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2$$

al variare di $c = (c_1, \dots, c_n)$ in $\mathbb{R}^n$.

Se poniamo $\mathcal{H}_n = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, il sottospazio (chiuso) generato da $e_1, \dots, e_n$, allora

$$\min_{c\in\mathbb{R}^n} f(c) = \min\{\|u - w\|^2 : w \in \mathcal{H}_n\} = \|u - P_{\mathcal{H}_n} u\|^2,$$

dove $P_{\mathcal{H}_n} u = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^* e_k$ per qualche scelta di numeri $c_1^*, \dots, c_n^*$, e $u - P_{\mathcal{H}_n} u \in \mathcal{H}_n^{\perp}$. In particolare, $(u - P_{\mathcal{H}_n} u, e_k) = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ e quindi $c_k^* = (u, e_k)$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Il numero $\hat{u}(i) = (u, e_i)$ si dice il *coefficiente di Fourier* di u di indice $i \in I$.

Teorema 5.2.3 (Disuguaglianza di Bessel)**.** *Sia $S = \{e_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormale in $\mathcal{H}$. Allora per ogni $u \in \mathcal{H}$ risulta che*

$$\sum_{i\in I} |\hat{u}(i)|^2 \le \|u\|^2,$$

dove si è posto

$$\sum_{i\in I} |\hat{u}(i)|^2 = \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{n} |\hat{u}(i_k)|^2 : i_1, \dots, i_n \in I \text{ distinti} \Big\}.$$

Dimostrazione. Dato che

$$0 \le \left\| u - \sum_{k=1}^{n} \hat{u}(i_k)\, e_{i_k} \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{u}(i_k)|^2,$$

risulta che

$$\sum_{k=1}^{n} |\hat{u}(i_k)|^2 \le \|u\|^2. \tag{5.1}$$

Ciò vale per ogni scelta di $i_1, \ldots, i_n \in I$ distinti. □

Osservazione 5.2.4. Si noti che

$$\sum_{i\in I} |\hat{u}(i)|^2 = \int_I |\hat{u}(i)|^2 d\mu(i),$$

dove μ è la misura che conta.

Corollario 5.2.5. *Sia $S = \{e_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormale in $\mathcal{H}$ e sia $u \in \mathcal{H}$.*

Allora l'insieme degli indici $i \in I$ tali che $\hat{u}(i) \neq 0$ è al più numerabile.

Dimostrazione. Infatti

$$\{i \in I : |\hat{u}(i)| > 0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{i \in I : \|u\|/(m+1) < |\hat{u}(i)| \le \|u\|/m.\}$$

Per la disuguaglianza di Bessel, ciascun insieme dell'unione è o finito o vuoto. □

Un sistema ortonormale S in $\mathcal{H}$ si dice *completo* oppure si dice che S è una *base (hilbertiana) ortonormale* per $\mathcal{H}$, se

$$(u, e_i) = 0 \ \text{ per ogni } \ i \in I \ \text{ implica che } \ u = 0.$$

Esempio 5.2.6. Il sistema ortonormale in ℓ^2 definito nell'Esempio 5.2.1 (1) è completo, infatti se $(x, e_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta che $x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $x = 0$.

Se S è un sistema ortonormale, indichiamo con $\operatorname{span}(S)$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di S.

Teorema 5.2.7. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $S = \{e_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormale in $\mathcal{H}$.*

Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) $\overline{\operatorname{span}(S)} = \mathcal{H}$*;*

(ii) *S è completo;*

(iii) *per ogni $u \in \mathcal{H}$, $u = \sum_{i\in I} \hat{u}(i)\, e_i$;*

(iv) per ogni $u \in \mathcal{H}$, $\|u\|^2 = \sum_{i \in I} |\hat{u}(i)|^2$;

(v) per ogni $u, v \in \mathcal{H}$, $(u, v) = \sum_{i \in I} \hat{u}(i)\ \widehat{v}(i)$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $u \in \mathcal{H}$ tale che $(u, e_i) = 0$ per ogni $i \in I$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u_\varepsilon \in \operatorname{span}(S)$ tale che $\|u - u_\varepsilon\| < \varepsilon$; dato che u_ε è una combinazione lineare finita di elementi di S, allora $(u, u_\varepsilon) = 0$.

Perciò $\varepsilon^2 > \|u - u_\varepsilon\|^2 = \|u\|^2 + \|u_\varepsilon\|^2 \geq \|u\|^2$ e cioè $\|u\| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, ossia $u = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia $u \in \mathcal{H}$; per il Corollario 5.2.5, si ha che $\hat{u}(i) \neq 0$ solo per un'infinità numerabile di indici $i \in I$: indichiamo questi con $\hat{u}(i_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Per la disuguaglianza di Bessel (Teorema 5.2.3), la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\hat{u}(i_n)|^2$ converge e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} \hat{u}(i_k)\, e_{i_k} \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\hat{u}(i_k)|^2 < \varepsilon^2,$$

per ogni $n, m > \nu$. Perciò la successione $\sum_{k=1}^{n} \hat{u}(i_k)\, e_{i_k}$ è di Cauchy; quindi converge ad un $v \in \mathcal{H}$ ed inoltre

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}(i_k)\, e_{i_k} = \sum_{i \in I} \hat{u}(i)\, e_i.$$

Ora, per ogni $i \in I$ risulta che

$$(u - v, e_i) = \lim_{n \to \infty} \Big(u - \sum_{k=1}^{n} \hat{u}(i_k)\, e_{i_k}, e_i \Big) = \lim_{n \to \infty} [\hat{u}(i) - \hat{u}(i_n)\ \delta_{i_n i}] = 0.$$

Per la completezza di S, segue che $u - v = 0$ e cioè $v = u$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Dalla (iii) segue che

$$\begin{aligned} \|u\|^2 \quad &= \quad \Big(u, \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \hat{u}(i_k)\, e_k \Big) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \hat{u}(k)\, (u, e_{i_k}) = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{u}(i_k)|^2 = \sum_{i \in I} |\hat{u}(i)|^2. \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (v). Dalla (iv) si ottiene:

$$\begin{aligned}(u,v) &= \frac{1}{4}\left\{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right\} = \\ &\frac{1}{4}\Big\{\sum_{i\in I}|\hat{u}(i)+\widehat{v}(i)|^2 - \sum_{i\in I}|\hat{u}(i)-\widehat{v}(i)|^2\Big\} = \\ &\sum_{i\in I}\hat{u}(i)\ \widehat{v}(i).\end{aligned}$$

(v) $\Rightarrow$ (ii). Sia $z \in \mathcal{H}$ ortogonale ad ogni e_i. Scelti $u = v = z$ in (v) si ha:

$$\|z\|^2 = (u,v) = \sum_{i\in I}\hat{u}(i)\ \widehat{v}(i) = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Ovvio. □

Le identità (iv) e (v) si dicono le *identità di Parseval.*

Un caso importante si presenta quando lo spazio di Hilbert in esame è separabile. Ricordiamo che uno spazio topologico si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme numerabile e denso.

Teorema 5.2.8. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Allora ogni sistema ortonormale in $\mathcal{H}$ è al più numerabile.*

Dimostrazione. Sia $D = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile denso in $\mathcal{H}$ ed S un sistema ortonormale in $\mathcal{H}$. Per ogni $e_i \in S$ esiste $n_i \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|e_i - u_{n_i}\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se $i \neq j$, si ha che

$$\sqrt{2} = \|e_i - e_j\| \leq \|e_i - u_{n_i}\| + \|u_{n_i} - u_{n_j}\| + \|e_j - u_{n_j}\|$$

e quindi $\|u_{n_i} - u_{n_j}\| > 0$, ossia $n_i \neq n_j$.

Abbiamo dunque stabilito una corrispondenza biunivoca di I con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. □

Osservazione 5.2.9 (Procedimento di Gram-Schmidt)**.** Osserviamo ora che, a partire da una successione qualsiasi $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{H}$, possiamo sempre costruire un sistema ortonormale $S = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mediante il metodo di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:* si pone infatti

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

e per ricorrenza si definisce:

$$e_n = \frac{v_n}{\|v_n\|},\ \text{dove}\ \ v_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1}(u_n, e_j)\ e_j,\ \ n = 2, 3, \cdots .$$

Se accadesse che $v_n = 0$ per qualche n, allora eliminiamo il vettore u_n, perchè è linearmente dipendente con i precedenti.

Teorema 5.2.10. *Ogni spazio di Hilbert separabile ammette sempre un sistema ortonormale completo*

Dimostrazione. Sia $D = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile denso di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e sia $S = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ il sistema ortonormale costruito con il procedimento di Gram-Schmidt.

Tale sistema è completo; infatti se u è ortogonale ad ogni $e_n \in S$, poiché per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $u_n \in D$ tale che $\|u - u_n\| < \varepsilon$ ed inoltre

$$(u, u_n) = (u, v_n) + \left(u, \sum_{k=1}^{n-1} (u_n, e_k)\ e_k\right) = (u, \|v_n\|\ e_n) = 0,$$

risulta $\|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \|u_n\|^2 = \|u - u_n\|^2 < \varepsilon^2$ e cioè $u = 0$. $\square$

5.3. Funzionali lineari

Sia X uno spazio normato (su $\mathbb{R}$). Un'applicazione $L : X \to \mathbb{R}$ si dice

(i) un *funzionale lineare* se $L(\alpha x+\beta y) = \alpha Lx+\beta Ly$ per ogni $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(ii) un *funzionale continuo* se, per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di X tale che $x_n \to x$ in X, risulta che $Lx_n \to Lx$;

(iii) un *funzionale limitato* se esiste una costante $c \geq 0$ tale che

$$|Lx| \leq c\,\|x\| \quad \text{per ogni} \quad x \in X;$$

in questo caso si pone per definizione

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup\{|Lu| : \|u\| = 1\} = \\ &\ \sup\{|Lu| : \|u\| \leq 1\} = \sup_{u\neq 0} \frac{|Lu|}{\|u\|}\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

È facile verificare che (5.2) definisce una norma nello spazio vettoriale

$$X' = \{L : X \to \mathbb{R} : L \text{ lineare e continuo}\},$$

alla luce del seguente risultato.

Teorema 5.3.1. *Sia $L : X \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare. Allora L è continuo se e solo se L è limitato.*

Dimostrazione. Se L non è limitato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in X$ tale che

$$|Lu_n| > n\,\|u_n\|,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Preso $v_n = u_n/(n\|u_n\|)$, si ha allora che $v_v \to 0$ e

$$|Lv_n| = \frac{|Lu_n|}{\|u_n\|} > 1,$$

cioè Lv_n non tende a 0. Questo contraddice il fatto che L è continuo.

Se invece L è limitato e $u_n \to u$ in X, allora, dato che

$$|Lu_n - Lu| = |L(u_n - u)| \leq \|L\| \, \|u_n - u\|,$$

segue che $Lu_n \to Lu$ per $n \to \infty$. □

Lo spazio vettoriale X' si dice lo *spazio duale* di X. Il seguente teorema caratterizza li spazio duale $\mathcal{H}'$ di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

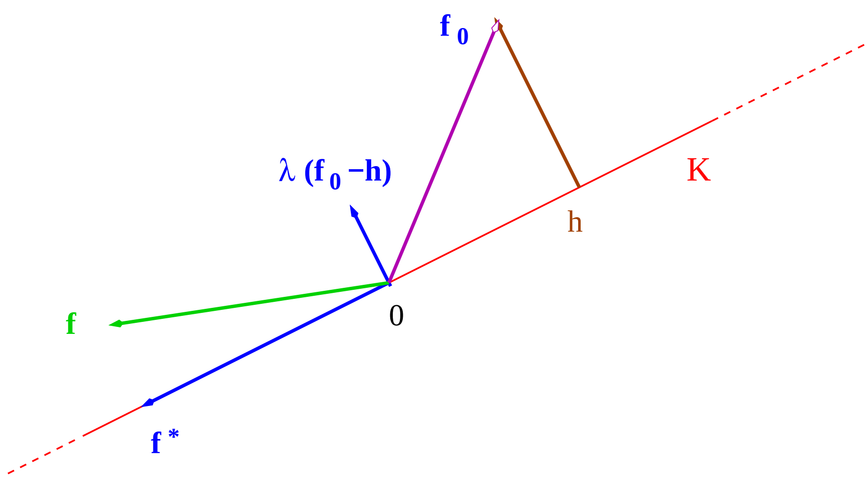

Figura 2. La costruzione nella dimostrazione del Teorema 5.3.2.

Teorema 5.3.2 (di rappresentazione di Riesz)**.** *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $\mathcal{H}'$ il suo duale.*

Allora, per ogni $L \in \mathcal{H}'$, esiste un solo $v \in \mathcal{H}$ tale che

$$Lu = (u, v) \quad \textit{per ogni} \quad u \in \mathcal{H}.$$

Inoltre $\|L\| = \|v\|$.

Dimostrazione. Sia $L \in \mathcal{H}'$, non identicamente nullo e sia $\mathcal{M} = L^{-1}(\{0\})$ il nucleo di L. Poichè L è lineare e continuo, allora $\mathcal{M}$ è un sottospazio vettoriale chiuso in $\mathcal{H}$.

Sia $u_0 \notin \mathcal{M}$ e sia $v_0 = P_{\mathcal{M}} u_0$; allora $u_0 = v_0 + (u_0 - v_0)$, dove $v_0 \in \mathcal{M}$ e $u_0 - v_0 \in \mathcal{M}^\perp$. Se $u \in \mathcal{H}$, allora possiamo scrivere

$$u = \lambda \, (u_0 - v_0) + P_{\mathcal{M}} u,$$

dove $Lu = \lambda\, L(u_0 - v_0) = \lambda\, Lu_0$ e cioè con $\lambda = Lu/Lu_0$; perciò, scegliendo

$$v = \frac{u_0 - v_0}{\|u_0 - v_0\|^2}\, Lu_0,$$

si ha:

$$(u, v) = \lambda\, (u_0 - v_0, v) + (P_{\mathcal{M}} u, v) = Lu,$$

dato che $v \in \mathcal{M}^\perp$ e $P_{\mathcal{M}} u \in \mathcal{M}$.

Infine, è chiaro che $|Lu| = |(u, v))| \le \|v\|\|u\|$ per ogni $u \in \mathcal{H}$ e quindi $\|L\| \le \|v\|$. D'altra parte, preso $u = v/\|v\|$, si ha che $Lu = (u, v) = \|v\|$ e quindi $\|v\| \le \|L\|$. $\square$

Una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ in uno spazio normato si dice *debolmente convergente* ad un elemento $u \in X$ — e si scriverà $u_n \rightharpoonup u$ — se, per ogni $L \in X'$, $Lu_n \to Lu$ per $n \to \infty$. È chiaro che, se $u_n \to u$ in X, allora anche $u_n \rightharpoonup u$.

Per il Teorema 5.3.2 appena dimostrato, $u_n \rightharpoonup u$ in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ se e solo se

$$(u_n, v) \to (u, v) \quad \text{per ogni} \quad v \in \mathcal{H}.$$

Il risultato che segue ci informa che la norma di uno spazio di Hilbert è una funzione semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole.

Teorema 5.3.3. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Se $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathcal{H}$, allora*

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \ge \|u\|.$$

Se inoltre $\|u_n\| \to \|u\|$, allora $u_n \to u$ in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. Risulta che

$$\|u\|^2 = \lim_{n\to\infty} (u_n, u) \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|\, \|u\| = \|u\|\, \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|,$$

dove si è applicato la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Inoltre, dato che $u_n + u \rightharpoonup 2u$, applicando l'identità del parallelogramma si ottiene che

$$\limsup_{n\to\infty}\, \|u_n - u\|^2 = \limsup_{n\to\infty} \{2\|u_n\|^2 + 2\|u\|^2 - \|u_n + u\|^2\} =$$
$$4\|u\|^2 - \liminf_{n\to\infty}\, \|u_n + u\|^2 \le 4\|u\|^2 - 4\|u\|^2 = 0,$$

se $\|u_n\| \to \|u\|$. $\square$

Il teorema di Bolzano-Weierstrass asserisce che ogni insieme limitato di $\mathbb{R}^N$ contiene una sottosuccessione convergente — è cioè relativamente compatto per successioni. In dimensione infinita ciò non accade, come mostra la proposizione seguente.

Proposizione 5.3.4. *Se ogni successione limitata in $\mathcal{H}$ contiene una sottosuccessione convergente, allora $\mathcal{H}$ ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{H}$ avesse dimensione infinita allora conterrebbe un sistema ortonormale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (almeno) numerabile. Dato che $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ se $n \neq m$, allora $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non potrebbe contenere alcuna sottosuccessione convergente. □

Il prossimo risultato si può riassumere dicendo che gli insiemi limitati in uno spazio di Hilbert separabile sono per lo meno debolmente (relativamente) compatti per successioni.

Teorema 5.3.5 (Teorema di Banach-Alaoglu)**.** *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e supponiamo che esista una costante $c > 0$ tale che $\|u_n\| \leq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Allora la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una sottosuccessione che converge debolmente ad un elemento di $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. Sia $D = \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme (numerabile) denso in $\mathcal{H}$.

Poiché $|(u_n, v_1)| \leq \|u_n\|\|v_1\| \leq c\ \|v_1\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{u_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che (u_n^1, v_1) converge ad un numero reale se $n \to \infty$. Poiché $|(u_n^1, v_2)| \leq \|u_n^1\|\|v_2\| \leq c\ \|v_2\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{u_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\{u_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che (u_n^2, v_2) converge ad un numero reale se $n \to \infty$. Iterando questo ragionamento, fissato $k \in \mathbb{N}$ esiste $\{u_n^k\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{u_n^{k-1}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \cdots \subseteq \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che (u_n^k, v_k) converge ad un numero reale se $n \to \infty$.

La successione $\{u_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sarà allora tale che (u_n^n, v_k) converge se $n \to \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, dato che $u_n^n \in \{u_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni $n \geq k$.

Fissiamo ora $v \in \mathcal{H}$ e $\varepsilon > 0$. Poiché D è denso in $\mathcal{H}$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\|v - v_k\| < \varepsilon/3c$. Inoltre esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|(u_n^n, v_k) - (u_m^m, v_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ per ogni } \ n, m > \nu.$$

Perciò, per ogni $n, m > \nu$ risulta che

$$\begin{aligned}
&|(u_n^n, v) - (u_m^m, v)| \leq \\
&\qquad |(u_n^n, v) - (u_n^n, v_k)| + |(u_n^n, v_k) - (u_m^m, v_k)| + |(u_m^m, v_k) - (u_m^m, v)| < \\
&\qquad |(u_n^n, v - v_k)| + \frac{\varepsilon}{3} + |(u_m^m, v_k - v)| \leq \\
&\qquad \|u_n^n\|\|v - v_k\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|u_m^m\|\|v - v_k\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da ciò segue che è ben definito il funzionale $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tale che

$$Lv = \lim_{n\to\infty} (u_n^n, v) \ \text{ per ogni } \ v \in \mathcal{H}.$$

È chiaro inoltre che L è lineare e limitato con $\|L\| \le c$. Per il Teorema 5.3.2, esiste $u \in \mathcal{H}$ tale che $Lv = (u, v)$ per ogni $v \in \mathcal{H}$; dunque

$$\lim_{n\to\infty} (u_n^n, v) = (u, v)$$

per ogni $v \in \mathcal{H}$, ossia $u_n^n \rightharpoonup u$ per $n \to \infty$. $\square$

Esercizi

1. Dimostrare l'asserzione dell'Esempio 5.2.1 (2). Dimostrare poi che le funzioni
$$f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}},\ n \in \mathbb{N},$$
formano un sistema ortonormale in $L^2[0, 2\pi]$.
2. Dimostrare che ogni sistema ortonormale numerabile di vettori e_n converge debolmente a zero.
3. Sia $\mathcal{M}$ un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e sia $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tale che Pu sia la proiezione di un vettore u su $\mathcal{M}$. Dimostrare che
   (i) P è lineare;
   (ii) $\|Pu\| \le \|u\|$ per ogni $u \in \mathcal{H}$ e $P^2 = P$;
   (iii) il nucleo di P è $\mathcal{M}^\perp$ e l'immagine di P è $\mathcal{M}$.
4. Sia $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{C})$, lo spazio delle successioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri complessi tali che
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 < \infty.$$
Dimostrare che
   (i) la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\, z^n$ ha raggio di convergenza ≥ 1 se $u \in \mathcal{H}$;
   (ii) per $|\lambda| < 1$ e $u \in \mathcal{H}$ si definisca $Lu = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\, \lambda^n$: trovare il vettore $v \in \mathcal{H}$ che definisce L;
   (iii) calcolare la norma di L.
5. Sia $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ e sia $\mathcal{M}$ il sottospazio di $\mathcal{H}$ delle funzioni continue e con derivata prima continua in $[0, 1]$ (quando necessario, solo destra o sinistra). Dimostrare che il funzionale lineare $L : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, che associa ad ogni funzione $u \in \mathcal{M}$ la sua derivata prima $u'(t)$ in un punto fissato $t \in [0, 1]$, non è estendibile ad un funzionale lineare e limitato su $\mathcal{H}$.

Capitolo 6

Spazi L^p

6.1. Le disuguaglianze di Jensen, Young, Hölder e Minkowski

Teorema 6.1.1 (Disuguaglianza di Jensen)**.** *Sia μ una misura positiva su una σ-algebra $\mathcal{M}$ sull'insieme X.*

Sia $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa e sia f una funzione a valori reali, sommabile su X rispetto a μ e tale che $a < f(x) < b$ per ogni $x \in X$.

Allora, se $\mu(X) = 1$, risulta che

$$\varphi\left(\int_X f\, d\mu\right) \leq \int_X \varphi(f)\, d\mu. \tag{6.1}$$

Dimostrazione. Sia $t_0 = \int_X f\, d\mu$; è chiaro che $t_0 \in (a, b)$. Applicando il Corollario 1.4.5, si ottiene:

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t_0) \geq p_{t_0}\ [f(x) - t_0]$$

dove $p_{t_0} \in [\varphi(t_0^-), \varphi(t_0^+)]$. La tesi segue integrando su X e tenendo conto che $\mu(X) = 1$. $\square$

Corollario 6.1.2. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile secondo Lebesgue e di misura finita. Sia φ come nel Teorema 6.1.1 e sia $f : E \to (a, b)$ una funzione sommabile su E.*

Allora

$$\varphi\left(\frac{1}{m(E)}\int_E f\, dx\right) \leq \frac{1}{m(E)}\int_E \varphi(f)\, dx.$$

Esempio 6.1.3. (i) Sia $\varphi(t) = e^t$; allora

$$\exp\left(\int_X g\, d\mu\right) \le \int_X e^g\, d\mu.$$

Se $X = \{1, \dots, n\}$ e se $\mu(\{i\}) = 1/n$ e $g(i) = x_i$, allora

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{x_i}.$$

Ponendo $y_i = e^{x_i}$, si ottiene la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica:

$$(y_1\ y_2 \cdots y_n)^{1/n} \le \frac{y_1 + y_2 + \cdot + y_n}{n}\ .$$

Per questo, quando $\mu(X) = 1$, le due quantità:

$$\int_X f\, d\mu \quad \text{e} \quad \exp\left(\int_X \log f\, d\mu\right)$$

si dicono rispettivamente *media aritmetica* e *media geometrica* della funzione $f > 0$.

(ii) Se $\mu(\{i\}) = \alpha_i > 0$ con $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$, si ottiene:

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdot + \alpha_n y_n.$$

(iii) Sia $\varphi(t) = \log t$; φ è concava e perciò, se p e $p' > 1$ sono *esponenti coniugati,* e cioè tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, allora per ogni $a, b > 0$, risulta:

$$\log\left(\frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{p'}\ b^{p'}\right) \ge \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log(ab).$$

Dunque si ottiene la *disuguaglianza di Young:*

$$ab \le \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{p'}\ b^{p'}.$$

Ponendo $\lambda\, a$, con $\lambda > 0$, al posto di a in questa disuguaglianza, si ottiene

$$ab \le \frac{\lambda^{p-1}}{p}\ a^p + \frac{\lambda^{-1}}{p'}\ b^{p'}. \tag{6.2}$$

Si noti che (6.2) è soddisfatta per ogni a, b e $\lambda > 0$ e vale con il segno di uguaglianza solo se

$$b^{p'} = \lambda\, a^p. \tag{6.3}$$

Teorema 6.1.4 (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $p, p' > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Se $|f|^p$ e $|g|^{p'}$ sono sommabili su X, allora fg è sommabile su X e si ha:

$$\int_X |fg|\; d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^{p'} d\mu\right)^{1/p'}. \tag{6.4}$$

Inoltre, il segno di uguaglianza in (6.4) vale se e solo se esiste $\lambda > 0$ tale che $|g|^{p'} = \lambda\; |f|^p$ quasi ovunque in X.

Dimostrazione. Se uno dei due fattori a secondo membro di (6.4) è nullo allora o $f = 0$ o $g = 0$ q.o. e quindi $f \cdot g = 0$ q.o., cioè la (6.4) vale senz'altro.

Altrimenti, applicando la disuguaglianza di Young (6.2) con $a = |f(x)|$ e $b = |g(x)|$, otteniamo che

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{\lambda^p}{p}\; |f(x)|^p + \frac{\lambda^{-1}}{p'}\; |g(x)|^{p'} \tag{6.5}$$

per quasi ogni $x \in X$, e quindi, integrando su X, abbiamo che

$$\int_X |fg|\; d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_X |f|^p\, d\mu + \frac{\lambda^{-1}}{p'} \int_X |g|^{p'}\, d\mu \tag{6.6}$$

per ogni $\lambda > 0$. Ponendo

$$A^p = \int_X |f|^p\, d\mu,\;\; B^{p'} = \int_X |g|^{p'}\, d\mu$$

nella (6.6) ed applicando (6.2) e (6.3), otteniamo

$$\int_X |fg|\; d\mu \leq AB$$

e cioè la (6.4).

Il segno di uguaglianza vale se e solo se per qualche λ la (6.5) vale con il segno di uguale q.o. e cioè, ancora per (6.2) e (6.3), se esiste λ tale che $\lambda = |g|^{p'}/|f|^p$. per q. o. $x \in X$. □

Teorema 6.1.5 (Disuguaglianza di Minkowski)**.** *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $1 \leq p < \infty$. Se $|f|^p$ e $|g|^p$ sono sommabili su X, anche $|f + g|^p$ è sommabile su X e risulta che*

$$\Big(\int_X |f+g|^p d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_X |g|^p d\mu\Big)^{1/p}. \tag{6.7}$$

Il segno di uguaglianza vale in (6.7) se e solo se $f = \lambda g$ su X per qualche $\lambda > 0$.

Dimostrazione. Se $p = 1$, la disuguaglianza (6.7) segue semplicemente dalla disuguaglianza triangolare puntuale $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.

Sia $p > 1$; poiché la funzione $\varphi(t) = t^p$ è convessa, risulta che

$$|f(x) + g(x)|^p = 2^p \left|\frac{f(x) + g(x)}{2}\right|^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

e quindi $|f + g|^p$ è sommabile su X.

Dimostriamo ora la (6.7). Possiamo supporre che l'integrale al primo membro di (6.7) sia positivo, altrimenti la disuguaglianza è banale. Per la disuguaglianza triangolare risulta:

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X |f + g|^{p-1}(|f| + |g|)\ d\mu. \tag{6.8}$$

La disuguaglianza di Hölder (6.4) implica allora che

$$\int_X |f||f + g|^{p-1} d\mu \leq \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X |f + g|^{p'(p-1)} d\mu\Big)^{1/p'},$$
$$\int_X |g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \Big(\int_X |g|^p d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X |f + g|^{p'(p-1)} d\mu\Big)^{1/p'};$$

quindi queste disuguaglianze e la (6.8) implicano che

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \left[\Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_X |g|^p d\mu\Big)^{1/p}\right]\Big(\int_X |f + g|^p d\mu\Big)^{1/p'},$$

dato che $p'(p - 1) = p$. La tesi si ottiene dividendo ambo i membri per $\Big(\int_X |f + g|^p d\mu\Big)^{1/p'}$.

Il segno di uguaglianza vale se vale il segno di uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder, cioè deve verificarsi che $|f+g|^{p'} = \lambda_1|f|^p$ e $|f+g|^{p'} = \lambda_2|g|^p$ q.o. in X e dunque che $|f| - \lambda|g| = 0$ per qualche $\lambda > 0$, cioè deve valere l'uguaglianza $f = \pm\lambda\, g$ che, inserita il (6.7) quando vale il segno di uguaglianza, implica che $f = \lambda\, g$ con $\lambda > 0$. □

6.2. Gli spazi $L^p(X)$

6.2.1. Lo spazio normato $L^p(X)$. Sia p un numero tale che $0 < p < \infty$ e sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Si dice che $f \in \mathcal{L}^p(X)$, se f è misurabile in X e se $|f|^p$ è sommabile in X.

Se $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile, l'*estremo superiore essenziale* di g in X è definito da

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} g(x) = \inf\{t : \mu(L_+(g, t)) = 0\}. \tag{6.9}$$

Esempio 6.2.1. Se $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ è la funzione di Dirichlet definita da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1], \end{cases}$$

allora è chiaro che l'estremo superiore di g è uguale ad 1 mentre, dato che

$$m\{x \in [0,1] : g(x) > t\} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq 0, \\ 1 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

l'estremo superiore essenziale di g è uguale a 0.

Indichiamo con $\mathcal{L}^\infty(X)$ l'insieme di tutte le funzioni misurabili f su X che sono *essenzialmente limitate* in X e cioè tali che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

È facile dimostrare che $\mathcal{L}^p(X)$ è uno spazio vettoriale per ogni $p \in (0, \infty]$. Se $1 \leq p \leq \infty$, possiamo definire in $\mathcal{L}^p(X)$ una *seminorma* definita da

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{6.10}$$

se $1 \leq p < \infty$ e

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|. \tag{6.11}$$

Infatti, con queste definizioni si ha chiaramente che

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

per ogni $p \in [1, \infty]$. Inoltre, la disuguaglianza di Minkowski (6.7) per $p \in [1, \infty)$ e quella triangolare per $p = \infty$ (si veda l'Esercizio 5) implicano che

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

per ogni $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$.

Si osservi che la disuguaglianza di Hölder si potrà scrivere ora come:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Tale disuguaglianza si può estendere al caso in cui f o $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ (e quindi g o $f \in \mathcal{L}^1(X)$): infatti, per ogni $t > \|f\|_\infty$, $\mu[L_+(|f|, t)] = 0$ e quindi

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \, d\mu = \int_{X \setminus L_+(|f|,t)} |f||g| \, d\mu \leq t \int_{X \setminus L_+(|f|,t)} |g| \, d\mu = t \int_X |g| \, d\mu = t \, \|g\|_1,$$

e dunque $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

La funzione $f \mapsto \|f\|_p$ definita dalle (6.10) e (6.11) non è però una norma non essendo definita positiva. Infatti $\|f\|_p = 0$ se e solo se $f \equiv 0$ q.o. in X. Possiamo però dare all'insieme $\mathcal{L}^p(X)$ una struttura di spazio normato, decidendo di identificare le funzioni che coincidono q.o. in X; d'ora in avanti, lavoreremo perciò con lo spazio normato $L^p(X)$ che indicherà lo spazio quoziente $\mathcal{L}^p(X)/\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza definita da: $f \sim g$ se e solo se $f = g$ q. o. in X. Con questo accorgimento $L^p(X)$ è uno spazio normato con la norma definita dalle (6.10) e (6.11). I suoi elementi sono classi di equivalenza i cui rappresentanti sono funzioni definite quasi ovunque.

Possiamo definire uno spazio L^p analogo anche per le funzioni misurabili a valori complessi, interpretando $|f|$ come il *modulo* di f.

Come già osservato nel capitolo precedente, nello spazio $L^2(X)$ si può definire il prodotto scalare

$$(f, g)_2 = \int_X f\, g\, d\mu \quad f, g \in L^2(X),$$

e risulta che $(f, f)_2 = \|f\|_2^2$.

Osservazione 6.2.2. Se $\mu(X) < \infty$ e se $f \in L^s(X)$ per $s > 0$, la disuguaglianza di Jensen (6.1) — o la disuguaglianza di Hölder (6.4) — implica che

$$\left(\frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X |f|^r d\mu \right)^{s/r} \leq \frac{1}{\mu(X)} \int\limits_X |f|^s d\mu,$$

per ogni $0 < r < s$ e quindi la funzione $(0, s] \ni r \mapsto \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f|^r d\mu \right)^{1/r}$ è crescente ed, in particolare, si avranno le inclusioni

$$L^\infty(X) \subset \cdots \subset L^p(X) \subset \cdots \subset L^1(X).$$

Infine, se $f \in L^\infty(X)$, abbiamo che

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

(il limite a primo membro esiste per la monotonia appena dimostrata e per il fatto che $\mu(X)^{1/p} \to 1$). D'altra parte, per ogni $\varepsilon > 0$, se poniamo $X_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ risulta che $\mu(X_\varepsilon) > 0$ ed inoltre

$$\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \geq \left(\int_{X_\varepsilon} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(X_\varepsilon)^{1/p}.$$

Perciò:

$$\|f\|_\infty - \varepsilon \leq \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty,$$

e dunque

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty. \tag{6.12}$$

6.2.2. Completezza: il teorema di Riesz-Fischer. È chiaro che $L^p(X)$, come ogni spazio normato, è uno spazio metrico. Si dirà quindi che una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ converge in $L^p(X)$ ad una funzione $f \in L^p(X)$ se $\|f_n - f\|_p \to 0$ per $n \to \infty$. Si dirà inoltre che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una *successione di Cauchy in* $L^p(X)$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste ν tale che $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ per ogni $n, m > \nu$.

Teorema 6.2.3 (Riesz-Fischer)**.** *Sia $1 \le p \le \infty$. Allora ogni successione di Cauchy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(X)$ converge in $L^p(X)$ ad una funzione $f \in L^p(X)$; $L^p(X)$ è quindi uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^p(X)$. Allora esiste n_1 tale che

$$\|f_n - f_{n_1}\|_p < \frac{1}{2},$$

se $n \ge n_1$; possiamo poi scegliere un indice $n_2 > n_1$ tale che

$$\|f_n - f_{n_2}\|_p < \frac{1}{2^2},$$

se $n \ge n_2$. Iterando questo ragionamento, possiamo costruire una successione di indici $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tali che

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k},\ k \in \mathbb{N}.$$

Poniamo

$$g_j = \sum_{k=1}^{j} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|;$$

per $j \to \infty$, g_j converge q.o. in X alla funzione

$$g = \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \tag{6.13}$$

ed inoltre, poiché

$$\|g_j\|_p \le \sum_{k=1}^{j} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} < 1,$$

allora $g_j \in L^p(X)$.

Supponiamo ora che $1 \le p < \infty$. Per il lemma di Fatou, otteniamo che

$$\int_X |g|^p d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \|g_j\|_p^p \le 1.$$

In particolare, g^p e quindi g è quasi ovunque finita in X, cosicché la serie

$$|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

converge per quasi ogni $x \in X$, cioè possiamo definire la funzione

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)]$$

per quasi ogni $x \in X$.

Se definiamo $f = 0$ dove essa non fosse definita, abbiamo dunque dimostrato che la sottosuccessione

$$f_{n_j} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{j-1} [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}]$$

converge q.o. in X ad f.

Ora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che

$$\|f_{n_j} - f_m\|_p < \varepsilon$$

per ogni m e $j > \nu$. Poiché f_{n_j} converge q.o., il lemma di Fatou allora implica che

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int_X |f_{n_j} - f_m|^p d\mu \leq \varepsilon^p$$

per ogni $m > \nu$, cioè $f - f_m \in L^p(X)$ e quindi anche $f = (f - f_m) + f_m \in L^p(X)$. L'ultima disuguaglianza implica anche che $f_m \to f$ in $L^p(X)$ se $m \to \infty$.

Sia ora $p = \infty$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^\infty(X)$. Gli insiemi

$$A_k = \{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\},$$
$$B_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\},$$

hanno misura nulla per ogni $k, n, m \in \mathbb{N}$, e quindi anche la loro unione F ha misura nulla.

Essendo $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty$ in $X \setminus F$, la serie (6.13) converge totalmente e quindi la successione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $X \setminus F$ ad una funzione f limitata. Se poniamo allora $f \equiv 0$ in F, con gli stessi argomenti usati per il caso $1 \leq p < \infty$, risulta che $f \in L^\infty(X)$ e che $f_n \to f$ in $L^\infty(X)$ se $n \to \infty$. □

En passant abbiamo dimostrato il seguente notevole risultato.

Teorema 6.2.4. *Ogni successione* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ *che converge in* $L^p(X)$ *ad una funzione* $f \in L^p(X)$ *contiene una sottosuccessione che converge quasi ovunque ad* f *in* X.

Osservazione 6.2.5. Ricordiamo che, se $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato, esso si dice uno *spazio di Banach* se è anche completo rispetto alla topologia generata dalla norma.

Il teorema di Riesz-Fischer ci dice che lo spazio $L^p(X)$ è uno *spazio di Banach* per ogni p tale che $1 \le p \le \infty$ ed inoltre che $L^2(X)$ è uno spazio di Hilbert.

6.3. Proiezione su insiemi convessi

6.3.1. Le disuguaglianze di Hanner e di Clarkson. Abbiamo osservato nel Capitolo 5 che in uno spazio vettoriale $\mathcal{H}$ dotato di prodotto scalare (per esempio in $L^2(X)$) vale l'identità del parallelogramma:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ x, y \in \mathcal{H}.$$

Una conseguenza di questa identità è che la palla unitaria in $\mathcal{H}$ è non solo convessa, ma anche uniformemente convessa, nel senso della definizione seguente.

Uno spazio normato si dice *uniformemente convesso* se la pallina unitaria è un insieme uniformemente convesso, cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in \mathcal{B}$ con $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ e $\|x-y\| > \varepsilon$ risulta che $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$.

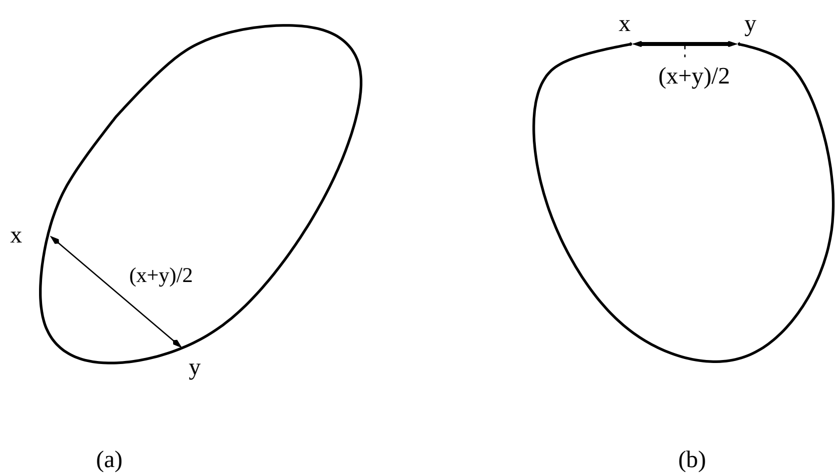

Figura 1. (a) Insieme uniformemente convesso; (b) insieme non uniformemente convesso.

Esempio 6.3.1. Sia $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2$ e, per $(x, y) \in \mathcal{B}$, si definisca:

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \|(x,y)\|_1 = |x| + |y|.$$

Allora $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_2)$ è uniformemente convesso, mentre $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_1)$ non lo è.

Se $1 < p < \infty$, anche $L^p(X)$ è uniformemente convesso; ciò è una conseguenza della *disuguaglianza di Hanner.*

Teorema 6.3.2 (Hanner)**.** *Siano $f, g \in L^p(X)$. Se $1 \le p \le 2$ risulta:*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \ge \left(\frac{\|f\|_p + \|g\|_p}{2}\right)^p + \left|\frac{\|f\|_p - \|g\|_p}{2}\right|^p, \tag{6.14}$$

$$\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p\right)^p + \left|\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p\right|^p \le \|f\|_p^p + \|g\|_p^p. \tag{6.15}$$

Se $2 \le p < \infty$, le disuguaglianze (6.14) e (6.15) valgono in senso contrario.

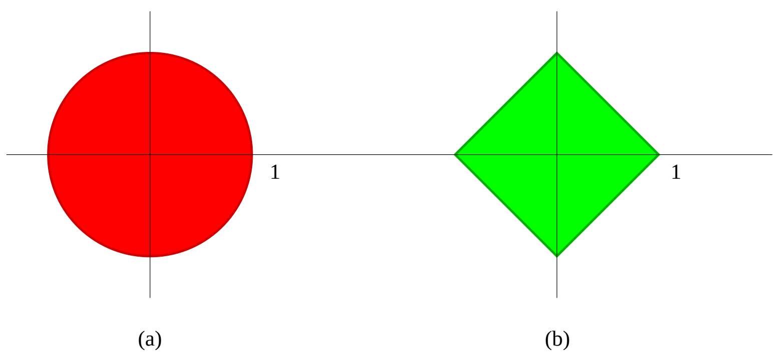

Figura 2. Palline unitarie in (a) $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_2)$ ed in (b) $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_1)$.

Osservazione 6.3.3. Se $p = 2$, (6.14) e (6.15) valgono nei due sensi e diventano l'identità del parallelogramma.

Se $p = 1$ la (6.15) non è niente di più della disuguaglianza triangolare.

Lemma 6.3.4. *Sia $p > 1$ e, per $s \in [0, 1]$ e $t > 0$, sia*

$$\varphi(s,t) = h(s) + k(s)\ t^p,$$

dove

$$h(s) = (1+s)^{p-1} + (1-s)^{p-1} \quad e \quad k(s) = [(1+s)^{p-1} - (1-s)^{p-1}]\ s^{1-p}.$$

Allora, per ogni $t > 0$ fissato, risulta che

$$\begin{aligned} &\varphi(s,t) \le |1+t|^p + |1-t|^p \qquad se\ \ 1 < p \le 2, \\ &\varphi(s,t) \ge |1+t|^p + |1-t|^p \qquad se\ \ p \ge 2. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $t \in (0,1)$. Dato che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) = (p-1)\{(1+s)^{p-2} - (1-s)^{p-2}\}(1 - t^p/s^p),$$

allora $s \mapsto \varphi(s,t)$ assume il suo massimo per $s = t$ se $1 < p \le 2$, e quindi in questo caso si ha:

$$\varphi(s,t) \le \varphi(t,t) = |1+t|^p + |1-t|^p.$$

Se ora $t > 1$ e se $p \in (1,2)$, dato che la funzione $s \mapsto k(s) - h(s)$ è crescente e si annulla per $s = 1$, risulta che $k(s) \le h(s)$ e perciò

$$\begin{aligned}\varphi(s,t) \quad \le \quad & k(s) + h(s)\ t^p = t^p[h(s) + k(s)(1/t)^p] = t^p \varphi(s, 1/t) \le \\ & t^p \varphi(1/t, 1/t) = |1+t|^p + |1-t|^p,\end{aligned}$$

dato che $1/t \in (0,1)$.

Se $p > 2$ si procede in modo analogo. □

Dimostrazione del Teorema 6.3.2. È chiaro che (6.15) segue da (6.14) sostituendo ad f e g le funzioni $f+g$ ed $f-g$ rispettivamente.

Fissate $f, g \in L^p(X)$, possiamo quindi supporre che $\|f\|_p \ge \|g\|_p$. Sia $p \in (1,2]$ e supponiamo che $|f| \ne 0$. Ponendo $t = |g|/|f|$ in (6.3.4), otteniamo:

$$h(s)|f|^p + k(s)|g|^p \le |f+g|^p + |f-g|^p,$$

per ogni $s \in [0,1]$. Notiamo che questa continua a valere se $f = 0$. Se integriamo su E abbiamo che

$$h(s)\|f\|_p^p + k(s)\|g\|_p^p \le \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

per ogni $s \in [0,1]$ e quindi quando il primo membro è massimo rispetto ad s. La tesi segue dunque dal Lemma 6.3.4. □

Le disuguaglianze di Hanner implicano le ben più note *disuguaglianze di Clarkson.*

Teorema 6.3.5 (Disuguaglianze di Clarkson)**.** *Sia* $1 < p < \infty$ *e sia* $p' > 1$ *tale che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Allora per ogni* $f, g \in L^p(X)$ *risulta:*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'} \le \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{6.17}$$

se $1 < p \le 2$, *e*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p} \le \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p \tag{6.18}$$

se $2 \le p < \infty$.

Lemma 6.3.6. *Siano p e p' tali che $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Allora valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$(1+t)^p+(1-t)^p \geq 2(1+t^{p'})^{p-1}, \tag{6.19}$$

per ogni $t\in[0,1]$, se $1<p\leq 2$ e

$$(1+t)^p+(1-t)^p \leq 2^{p-1}(1+t^p), \tag{6.20}$$

per ogni $t\in[0,1]$, se $2\leq p\leq\infty$.

Dimostrazione. (i) Il caso $p=2$ è banale. Dimostriamo (6.19); stiamo quindi supponendo che $1<p<2$.

Sviluppando in serie di McLaurin, si ottiene la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
&(1+t)^p+(1-t)^p-2(1+t^{p'})^{p-1}=\\
&\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}t^k+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{k}t^k-2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}t^{kp'}=\\
&2\sum_{j=1}^{\infty}\binom{p}{2j}t^{2j}-2\sum_{j=1}^{\infty}\binom{p-1}{2j}t^{2jp'}-2\sum_{j=1}^{\infty}\binom{p-1}{2j-1}t^{p'(2j-1)}=\\
&2\sum_{j=1}^{\infty}t^{2jp'}\left\{\binom{p}{2j}t^{2j(1-p')}-\binom{p-1}{2j}-\binom{p-1}{2j-1}t^{-p'}\right\}.
\end{aligned}\tag{6.21}$$

Si noti che, dato che $1<p<2$, allora sia $\binom{p}{2j}$ che $\binom{p-1}{2j-1}$ sono sempre numeri positivi. La funzione di t

$$\psi_j(t)=\binom{p}{2j}t^{2j(1-p')}-\binom{p-1}{2j-1}t^{-p'}-\binom{p-1}{2j}$$

ha derivata:

$$\begin{aligned}
\psi_j'(t)= \quad & 2j(1-p')\binom{p}{2j}t^{2j(1-p')-1}+p'\binom{p-1}{2j-1}t^{-p'-1}=\\
&-\frac{p}{p-1}\binom{p-1}{2j-1}\{t^{2j(1-p')-1}-t^{-p'-1}\},
\end{aligned}$$

che dunque si annulla solo se $t=1$ ed è altrimenti negativa; quindi $\psi_j(t)\geq\psi_j(1)=0$. Perciò dall'ultima riga di (6.21) segue (6.19).

(ii) Dimostriamo ora (6.20).

Sia

$$\varphi(t)=(1+t)^p+(1-t)^p-2^{p-1}(1+t^p),$$

per $t\in[0,1]$; si ha:

$$\varphi'(t)=p\,[(1+t)^{p-1}-(1-t)^{p-1}-2^{p-1}t^{p-1}]=p\,t^{p-1}[\psi(1/t)-2^{p-1}],$$

dove $\psi(s) = (1+s)^{p-1} - (s-1)^{p-1}$ è crescente per $s \geq 1$ e quindi tale che $\psi(s) \geq \psi(1) = 2^{p-1}$. Dunque $\varphi(t)$ cresce e da ciò segue che $\varphi(t) \leq \varphi(1)$ e cioè (6.20). □

Dimostrazione del Teorema 6.3.5. (i) Sia $1 < p \leq 2$. Si può supporre che $t = \|f-g\|_p / \|f+g\|_p \leq 1$ in (6.19). Moltiplicando ambo i membri di (6.19) per $\|f+g\|_p^p$, si ottiene:

$$2\left(\|f+g\|_p^{p'} + \|f-g\|_p^{p'}\right)^{p-1} \leq \\ (\|f+g\|_p + \|f-g\|_p)^p + |\|f+g\|_p - \|f-g\|_p|^p .$$

Da questa per la (6.15) si ottiene facilmente (6.17).

(ii) Sia $2 \leq p < \infty$. In questo caso, si sceglie $t = \|g\|_p^p / \|f\|_p^p \leq 1$ in (6.20) e si moltiplica la stessa (6.20) per $\|f\|_p^p$ per ottenere:

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

Questa e (6.14) (ricordarsi che vale al contrario!) implicano (6.18). □

Corollario 6.3.7 (Uniforme convessità)**.** *Sia $1 < p < \infty$. Allora $L^p(X)$ è uniformemente convesso.*

Dimostrazione. Sia $1 < p \leq 2$ e siano $f, g \in L^p(X)$ tali che $\|f\|_p, \|g\|_p \leq 1$ e $\|f-g\|_p \geq \varepsilon$. Dalla (6.17) segue che

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'};$$

perciò:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq 1 - \delta_\varepsilon$$

con $\delta_\varepsilon = 1 - [1 - (\varepsilon/2)^{p'}]^{1/p'}$.

Se invece $2 < p < \infty$, si conclude con la (6.17), avendo posto $\delta_\varepsilon = 1 - [1 - (\varepsilon/2)^p]^{1/p}$. □

6.3.2. Il teorema della proiezione. Un risultato importante dimostrato nel Capitolo 5 è il Teorema della Proiezione 5.1.3. Un risultato analogo vale per gli spazi $L^p(X)$ con $1 < p < \infty$; ciò è conseguenza delle disuguaglianze di Clarkson o, più in generale, dell'uniforme convessità di $L^p(X)$.

Teorema 6.3.8 (Proiezione su insiemi convessi)**.** *Sia $1 < p < \infty$ e sia $\mathcal{C}$ un sottoinsieme convesso di $L^p(X)$ che sia chiuso nella topologia indotta dalla norma.*

Sia $f \in L^p(X) \setminus \mathcal{C}$ e sia

$$d_p = \operatorname{dist}(f, \mathcal{C}) = \inf_{g \in \mathcal{C}} \|f-g\|_p.$$

Allora esiste una sola funzione $h \in \mathcal{C}$ tale che $\|f-h\|_p = d_p$. La funzione $h = P_{\mathcal{C}}(f)$ si dice la proiezione di f su $\mathcal{C}$ e si verifica che

$$\int_X |f-h|^{p-2}(f-h)(g-h)\, d\mu \leq 0 \quad \textit{per ogni} \quad g \in \mathcal{C}. \tag{6.22}$$

Dimostrazione. La situazione geometrica è quella della Fig. 1 nel Capitolo 5 e la dimostrazione procede come quella del Teorema 5.1.3 con qualche variante. Dato che ogni traslato di $\mathcal{C}$ rimane chiuso e convesso, possiamo supporre che $f = 0 \notin \mathcal{C}$.

Sia $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ una successione minimizzante, ossia tale che $\|g_n\|_p \to d_p$. Per dimostrae che essa è di Cauchy, invece che l'identità del parallelogramma usiamo le disuguaglianze di Clarkson.

Se $1 < p \leq 2$, applicando (6.17) con $f = g_n$ e $g = g_m$ otteniamo:

$$\left\|\frac{g_n+g_m}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{g_n-g_m}{2}\right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{\|g_n\|_p^p + \|g_m\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

e quindi, dato che $\dfrac{g_n+g_m}{2} \in \mathcal{C}$, possiamo scrivere:

$$\left\|\frac{g_n-g_m}{2}\right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{\|g_n\|_p^p + \|g_m\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} - d_p^{p'}.$$

Quando n ed m tendono all'infinito il secondo membro di quest'ultima disuguaglianza tende a zero e quindi $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Se $p \geq 2$, applichiamo (6.18) ed otteniamo con ragionamento analogo che

$$\left\|\frac{g_n-g_m}{2}\right\|_p^{p} \leq \frac{\|g_n\|_p^p + \|g_m\|_p^p}{2} - d_p^p,$$

da cui ricaviamo ancora che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Il resto della dimostrazione dell'esistenza di h procede in modo simile a quanto fatto per il Teorema 5.1.3: poiché $L^p(X)$ è completo, g_n converge in $L^p(X)$ ad una funzione $h \in L^p(X)$ e, dato che $\mathcal{C}$ è chiuso, $h \in \mathcal{C}$. Perciò $d_p = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_p = \|h\|_p$, per la disuguaglianza triangolare.

Se $h' \in \mathcal{C}$ fosse un'altra funzione tale che $\|h'\|_p = d_p$, applicando ad h ed h' le disuguaglianze di Clarkson ed i ragionamenti fatti per g_n e g_m, otteniamo facilmente che $h = h'$ q.o. in X.

Dimostriamo infine (6.22) che, quando $f = 0$ si legge così:

$$\int_X |h|^{p-2} h\,(g-h)\, d\mu \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad g \in \mathcal{C}.$$

Fissata $g \in \mathcal{C}$ e per $\lambda \in [0,1]$, poniamo $N(\lambda) = \|(1-\lambda)\,h + \lambda\,g\|_p^p = \|h + \lambda(g-h)\|_p^p$. La convessità di $\mathcal{C}$ implica che $(1-\lambda)\,h + \lambda\,g \in \mathcal{C}$ e quindi che $N(\lambda) \geq N(0) = d_p^p$ per ogni $\lambda \in [0,1]$, da cui segue che $N'(0) \geq 0$. La tesi allora segue dal Lemma 6.3.10 seguente applicato alle funzioni $\varphi = h$ e $\psi = g - h$. □

Corollario 6.3.9. *Se $\mathcal{M}$ è un sottospazio di $L^p(X)$, allora invece di* (6.22) *si ha:*

$$\int_X |f-h|^{p-2}(f-h)\,k\,d\mu = 0 \quad \textit{per ogni} \quad k \in \mathcal{M}. \tag{6.23}$$

Dimostrazione. In queste ipotesi, la $N(\lambda) \geq N(0)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (in particolare per λ in un intorno completo di 0). Quindi $N'(0) = 0$. □

Lemma 6.3.10 (Differenziabilità della norma)**.** *Siano φ e ψ due funzioni in $L^p(X)$ per $1 < p < \infty$. Allora la funzione $N : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$N(\lambda) = \int_X |\varphi + \lambda\,\psi|^p\,d\mu, \ \ 0 \leq \lambda \leq 1,$$

è derivabile e

$$N'(0) = p \int_X |\varphi|^{p-2}\varphi\,\psi\,d\mu.$$

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 4.7.6 alla funzione

$$F(\lambda, x) = |\varphi(x) + \lambda\,\psi(x)|^p.$$

Poiché $p > 1$, essa è di classe C^1 in λ e si ha che

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,\lambda) = p\,|\varphi(x) + \lambda\,\psi(x)|^{p-2}[\varphi(x) + \lambda\,\psi(x)]\,\psi(x),$$

per quasi ogni $x \in X$.

D'altra parte risulta che

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,\lambda)\right| = p\,|\varphi(x) + \lambda\,\psi(x)|^{p-1}|\psi(x)| \leq p\,(|\varphi(x)| + |\psi(x)|)^{p-1}|\psi(x)|,$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$, e la funzione all'ultimo membro è sommabile per la disuguaglianza di Hölder, essendo $\psi \in L^p(X)$ e $(|\varphi| + |\psi|)^{p-1} \in L^{p'}(X)$.

Dal Teorema 4.7.6 otteniamo perciò che

$$N'(\lambda) = p \int_E |\varphi + \lambda\,\psi|^{p-2}(\varphi + \lambda\,\psi)\,\psi\,d\mu$$

e dunque, ponendo $\lambda = 0$, la formula per $N'(0)$. □

Il Lemma 6.3.10 ci dice che la norma $L^p(X)$ è un esempio di funzione *differenziabile secondo Gateaux.*

6.4. Lo spazio duale di $L^p(X)$

6.4.1. Funzionali lineari e continui su $L^p(X)$. Essendo $L^p(X)$ uno spazio normato, possiamo definire lo spazio duale $L^p(X)'$ dei funzionali lineari e continui ed il concetto di convergenza debole, come abbiamo fatto nel Capitolo 5.

Osservazione 6.4.1. È chiaro che se $f_n \to f$ in $L^p(X)$ allora $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(X)$. Vedremo che il contrario non è sempre vero.

Nel Capitolo 5 abbiamo inoltre dimostrato che ad ogni funzionale lineare e continuo su uno spazio di Hilbert si può associare, tramite il prodotto scalare, uno ed un solo vettore dello spazio. Nel caso dello spazio $L^p(X)$ la situazione è leggermente differente, ma analoga. Intanto, non è possibile definire un prodotto scalare. La forma bilineare definita da

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\, g\, d\mu$$

non è infatti in generale definita per ogni $f, g \in L^p(X)$. Come sappiamo, essa è però definita per ogni $f \in L^p(X)$ e $g \in L^{p'}(X)$ e permette di definire dei funzionali lineari e continui, come mostra il risultato successivo.

A questo scopo premettiamo: uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ si dice *σ-finito* se X è unione numerabile di insiemi di misura finita.

Teorema 6.4.2. *Sia $1 \le p \le \infty$ e sia $g \in L^{p'}(X)$; inoltre, se $p = 1$ supponiamo che $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sia σ-finito. Definiamo l'applicazione $L_g : L^p(X) \to \mathbb{R}$ con la formula*

$$L_g(f) = \int_X g\, f\, d\mu, \ \ f \in L^p(X).$$

Allora $L_g \in L^p(X)'$ e $\|L_g\| = \|g\|_{p'}$.

Dimostrazione. Infatti, è chiaro che L_g è lineare; inoltre, dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$|L_g(f)| \le \|g\|_{p'} \|f\|_p,$$

per ogni $f \in L^p(X)$. Pertanto L_g è limitato e $\|L_g\| \le \|g\|_{p'}$.

Se $1 < p < \infty$, scegliendo $f = |g|^{p'-2} g$ quando $g \neq 0$ ed $f = 0$ altrimenti, la disuguaglianza di Hölder vale con il segno di uguaglianza e quindi

$$\|L_g\| \|f\|_p \ge L_g(f) = \|g\|_{p'} \|f\|_p,$$

da cui otteniamo che $\|L_g\| = \|g\|_{p'}$.

Se $p = \infty$, si sceglie $f = g/|g|$ dove $g \neq 0$ ed $f = 0$ altrimenti; si ottiene ancora $L_g(f) = \|g\|_1 \|f\|_\infty$.

Infine, il caso $p = 1$ è un po' più complicato. Sia $X_\varepsilon = \{x \in X : |g(x)| \ge \|g\|_\infty - \varepsilon\}$; X_ε ha misura positiva (anche infinita) e quindi, essendo lo spazio di misura σ-finito, esiste E_n tale che $0 < \mu(X_\varepsilon \cap E_n) < \infty$. Definiamo allora $f = g/|g|$ in $X_\varepsilon \cap E_n$ ed $f = 0$ altrimenti; si ottiene:

$$L_g(f) = \int_{X_\varepsilon \cap E_n} |g|\, d\mu \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(X_\varepsilon \cap E_n) = (\|g\|_\infty - \varepsilon)\ \|f\|_1.$$

Quindi $\|L_g\| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ ossia $\|L_g\| \geq \|g\|_\infty$. □

6.4.2. Topologia debole in $L^p(X)$.

Teorema 6.4.3 (I funzionali lineari separano)**.** *Sia $f \in L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, con X σ-finito nel caso $p = \infty$.*

Se $L(f) = 0$ per ogni $L \in L^p(X)'$, allora $f \equiv 0$.

Osservazione 6.4.4. (i) Una conseguenza del Teorema 6.4.3 è che, se $f_n \rightharpoonup f$ e $f_n \rightharpoonup g$, allora $f = g$ quasi ovunque in E. Il limite debole è quindi unico in $L^p(X)$.

(ii) Il Teorema 6.4.3 ci informa che, per stabilire che due funzioni f e g siano differenti, basta trovare un funzionale lineare L tale che $L(f) \neq L(g)$.

Dimostrazione. Se $1 < p < \infty$, definiamo $g(x) = |f(x)|^{p-2} f(x)$ se $f(x) \neq 0$ e $g(x) = 0$ se $f(x) = 0$. Poiché

$$\int_X |g|^{p'}\, d\mu = \int_X |f|^{p'(p-1)}\, d\mu = \int_X |f|^p\, d\mu < \infty,$$

allora $g \in L^{p'}(X)$. Dato che allora $L_g \in L^p(X)'$ e $L_g(f) = \|f\|_p^p$, allora per l'ipotesi risulta che $\|f\|_p = 0$.

Se $p = 1$, si pone $g(x) = f(x)/|f(x)|$ se $f(x) \neq 0$ e $g(x) = 0$ altrimenti. Allora $g \in L^\infty(X)$ e si conclude con lo stesso argomento di prima.

Se $p = \infty$, siano E_n, $n \in \mathbb{N}$, gli insiemi di misura finita la cui unione è uguale ad X e sia $E_n^* = \{x \in E_n : f(x) \neq 0\}$; nel caso in cui $m(E_n^*) > 0$, definiamo

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}\ \mathcal{X}_{E_n^*}(x).$$

Il funzionale L_g è limitato su $L^\infty(X)$, dato che $g \in L^1(X)$. Per l'ipotesi, risulta che $0 = L_g(f) = \int_{E_n^*} |f(x)|\, d\mu$, cioè $f = 0$ in E_n^* e quindi $f \equiv 0$ q.o. in E_n e dunque in X. □

Il seguente risultato è l'analogo del Teorema 5.3.3.

Teorema 6.4.5 (Semicontinuità inferiore debole della norma L^p)**.** *Fissato $1 \leq p \leq \infty$, con X σ-finito se $p = \infty$, supponiamo che $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(X)$.*

Allora

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \geq \|f\|_p. \tag{6.24}$$

Inoltre, se $1 < p < \infty$ *e se* $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, *allora* $f_n \to f$ *in* $L^p(X)$.

Dimostrazione. Sia $1 \le p < \infty$ e sia $g = |f|^{p-2} f\, \mathcal{X}_{\{x\in X : f(x)\neq 0\}}$ come abbiamo definito nella dimostrazione del Teorema 6.4.3. Allora $L_g \in L^p(X)'$ e risulta:

$$L_g(f_n) \le \|g\|_{p'} \|f_n\|_p$$

e quindi

$$\|f\|_p^p = L_g(f) = \lim_{n\to\infty} L_g(f_n) \le \|g\|_{p'} \ \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p.$$

Si conclude osservando che $\|g\|_{p'} = \|f\|_p^{p-1}$.

Se $p = \infty$, sia $X_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Dato che $\mu(X_\varepsilon) > 0$ ed X è σ-finito, esiste $E_n \in \mathcal{M}$ tale che $0 < \mu(X_\varepsilon \cap E_n) < \infty$; ponendo

$$g = \frac{f}{|f|}\, \mathcal{X}_{X_\varepsilon \cap E_n},$$

risulta:

$$L_g(f_n) \le \mu(X_\varepsilon \cap E_n)\ \|f_n\|_\infty$$

e quindi

$$\int_{X_\varepsilon \cap E_n} |f(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} L_g(f_n) \le \mu(X_\varepsilon \cap E_n)\ \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty.$$

Poiché

$$\int_{X_\varepsilon \cap E_n} |f(x)|\, dx \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(X_\varepsilon \cap E_n),$$

si ottiene che

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty \ge \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si conclude.

Per dimostrare la seconda asserzione, sfruttiamo le disuguaglianze di Clarkson per $1 < p < \infty$. Se $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, dato che $f_n + f \rightharpoonup 2f$, si ha:

$$2\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n + f\|_p \le \limsup_{n\to\infty} (\|f_n\|_p + \|f\|_p) = 2\|f\|_p,$$

e quindi $\|f_n + f\|_p \to 2\|f\|_p$. Si conclude applicando (6.17) e (6.18) alle funzioni f_n ed f. $\square$

6.4.3. Il teorema di rappresentazione di Riesz. Per lo spazio $L^p(X)$ con $1 \le p < \infty$ vale un risultato che caratterizza i funzionali lineari e continui, analogo al Teorema 5.3.2.

Teorema 6.4.6 (di rappresentazione di Riesz)**.** *Sia $1 \le p < \infty$ e sia X σ-finito se $p = 1$.*

Allora $L^p(X)'$ si può identificare con $L^{p'}(X)$, dove $1/p + 1/p' = 1$. In altre parole, per ogni $L \in L^p(X)'$ esiste una sola funzione $g \in L^{p'}(X)$ tale che

$$L(f) = L_g(f) = \int_X g\, f\, d\mu \quad \text{per ogni} \quad f \in L^p(X).$$

Inoltre l'applicazione $L^p(X)' \ni L \leftrightarrow g \in L^{p'}(X)$ è un'isometria, essendo $\|L\| = \|g\|_{p'}$.

Dimostrazione. Per $1 < p < \infty$ la dimostrazione ripercorre quella del Teorema 5.3.2. Sia $L \in L^p(X)'$, $L \neq 0$. Il nucleo di L,

$$\mathcal{C} = \{f \in L^p(X) : L(f) = 0\} = L^{-1}(\{0\}),$$

è un sottoinsieme proprio di $L^p(X)$, convesso ($\mathcal{C}$ è un sottospazio vettoriale) e chiuso (L è continuo). Sia $f_0 \in L^p(X) \setminus \mathcal{C}$, cioè f_0 è tale che $L(f_0) \neq 0$. Per il Teorema 6.3.8, esiste la proiezione $h \in \mathcal{C}$ di f_0 su $\mathcal{C}$ e, per il il Corollario 6.3.9, risulta che

$$\int_X |f_0 - h|^{p-2}(f_0 - h)\, k\, d\mu = 0 \quad \text{per ogni} \quad k \in \mathcal{C}. \tag{6.25}$$

Se ora $f \in L^p(X)$, possiamo sempre scrivere che $f = \lambda(f_0 - h) + k$, dove $k \in \mathcal{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Infatti, se

$$\lambda = \frac{L(f)}{L(f_0)},$$

si ha che

$$L(f - \lambda(f_0 - h)) = L(f) - \lambda L(f_0 - h) = L(f) - \lambda L(f_0) = 0,$$

e quindi $f - \lambda(f_0 - h) = k$ per qualche $k \in \mathcal{C}$.

Se α è un parametro reale, la funzione $g = \alpha\, |f_0 - h|^{p-2}(f_0 - h)$ è un elemento di $L^{p'}(X)$ e si ha:

$$\begin{aligned}\int_X g\, f\, d\mu &= \lambda \int_X g\, (f_0 - h)\, d\mu + \int_E g\, k\, d\mu = \alpha\lambda \int_X |f_0 - h|^p d\mu = \\ & \alpha\, \frac{\|f_0 - h\|_p^p}{L(f_0)}\, L(f),\end{aligned}$$

la penultima uguaglianza segue dalla proprietà (6.25).

Scegliendo $\alpha = L(f_0)/\|f_0 - h\|_p^p$, si ottiene dunque che

$$L(f) = \int_X g\, f\, d\mu = L_g(f),$$

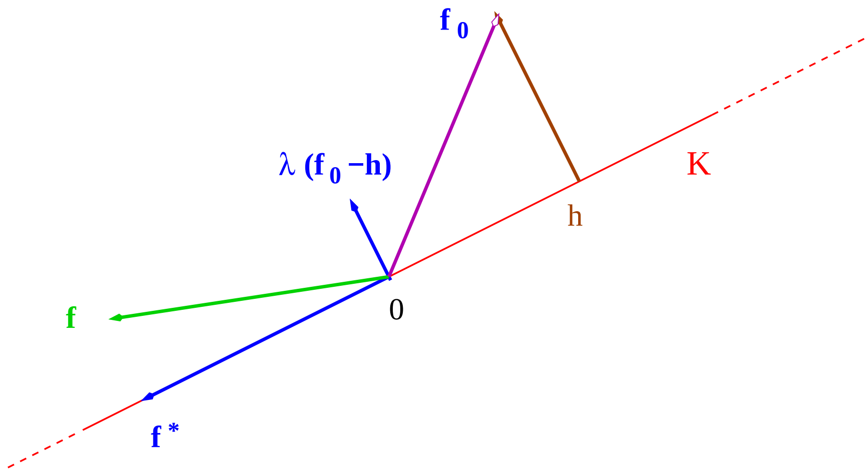

Figura 3. La costruzione nella dimostrazione del Teorema 6.4.6.

dove

$$g = \frac{L(f_0)}{\|f_0 - h\|_p^p} \, |f_0 - h|^{p-2}(f_0 - h).$$

La funzione g è univocamente determinata. Infatti, se $g' \in L^{p'}(X)$ fosse un'altra funzione che rappesenta L, si avrebbe $L_g = L_{g'}$ e cioè

$$\int_X (g - g') \, f \, d\mu = 0 \quad \text{per ogni } f \in L^p(X);$$

scegliendo $f = |g - g'|^{p'-2}(g - g')$, si ottiene allora che $\|g - g'\|_{p'}^{p'} = 0$ e quindi che $g' = g$ in $L^{p'}(X)$.

Se $p = 1$, supponiamo dapprima che $\mu(X) < \infty$. In questo caso, $L^p(X) \subset L^1(X)$ per ogni $p > 1$ e quindi, se $L \in L^1(X)'$, si ha che $L \in L^p(X)'$ per ogni $p > 1$, dato che

$$|L(f)| \le \|L\| \|f\|_1 \le \|L\| \, \mu(X)^{1/p'} \|f\|_p, \tag{6.26}$$

per la disuguaglianza di Hölder. Dalla dimostrazione appena conclusa segue che esiste una sola $g_p \in L^{p'}(X)$ tale che $L(f) = L_{g_p}(f) = \int_X g_p \, f \, d\mu$ per ogni $f \in L^p(X)$. È chiaro che g_p non dipende da p, infatti se $q > p$ allora esiste $g_q \in L^{q'}(X)$ tale che $L = L_{g_q}$ su $L^q(X)$. Dato che $L^q(X) \subset L^p(X)$, si ha:

$$0 = L_{g_p} - L_{g_q} = L_{g_p - g_q} \quad \text{su} \quad L^q(X).$$

Scegliendo $f = |g_p - g_q|^{q'-2}(g_p - g_q)$, risulta che $f \in L^q(X)$ e quindi

$$0 = L_{g_p - g_q}(f) = \|g_p - g_q\|_{q'}^{q'},$$

cioè $g_q = g_p$. Dunque possiamo supporre che $g_p = g$, ossia che $L = L_g$ su ogni $L^p(X)$ con $p > 1$.

Presa $f = |g|^{p'-2}g$, risulta che $f \in L^p(X)$ e dalla (6.26) segue che

$$\int_X |g|^{p'} d\mu = L(f) \leq \mu(X)^{1/p'} \|L\| \|g\|_{p'}^{p'-1}$$

e quindi che $\|g\|_{p'} \leq \mu(X)^{1/p'} \|L\|$ per ogni $p > 1$. Se $p \to 1$, allora $p' \to \infty$ e quindi

$$\|g\|_\infty = \lim_{p' \to +\infty} \|g\|_{p'} \leq \|L\|,$$

cioè $g \in L^\infty(X)$ e $L = L_g$ su ogni $L^p(X)$ con $p > 1$.

Se ora $f \in L^1(X)$, ponendo

$$f_n = f\ \mathcal{X}_{\{x \in X :\, |f(x)| \leq n\}},$$

$f_n \to f$ q.o. e $|f_n| \leq |f|$ in X; per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3, $f_n \to f$ in $L^1(X)$. Allo stesso modo $gf_n \to gf$ in $L^1(X)$. Inoltre $f_n \in L^p(X)$. Dunque, possiamo concludere che

$$L(f) = \lim_{n\to\infty} L(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X g\, f_n \, d\mu = \int_X g\, f\, d\mu,$$

dove la prima uguaglianza vale perché L è continuo su $L^1(X)$.

Se infine $m(X) = \infty$, poniamo $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} f\ \mathcal{X}_{E_k}$ con $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, dove E_k sono misurabili, a due a due disgiunti e di misura finita.

Se $L \in L^1(X)'$, allora il funzionale L_k definito da $L_k(f) = L(f\ \mathcal{X}_{E_k})$ per $f \in L^1(E_k)$ è un elemento di $L^1(E_k)'$. Per quanto dimostrato prima, esiste $g_k \in L^\infty(E_k)$ tale che

$$L_k(f) = \int_{E_k} f\, g_k \, d\mu$$

per ogni $f \in L^1(E_k)$. Inoltre, poiché

$$|L_k(f)| = |L(f\ \mathcal{X}_{E_k})| \leq \|L\| \|f\|_{1,E_k}$$

per ogni $f \in L^1(E_k)$, si ottiene che

$$\|g_k\|_\infty = \|L_k\| = \sup\Big\{\int_{E_k} f\, g_k\, d\mu : \|f\|_{1,E_k} \leq 1\Big\} \leq \|L\|$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Sia $g = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k\ \mathcal{X}_{E_k}$; g è misurabile e

$$\|g\|_\infty \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|g_k\|_\infty \leq \|L\|.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\int_X g\, f\, d\mu &= \int_X \sum_{k\in\mathbb{N}} g\, \mathcal{X}_{E_k}\, f\, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{E_k} g_k\, f\, d\mu \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} L(f\ \mathcal{X}_{E_k}) = L\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} f\ \mathcal{X}_{E_k}\Big) \\
&= L(f),
\end{aligned}$$

per l'additività numerabile della misura. □

Esempio 6.4.7. Siamo ora in grado di costruire un esempio di successione che converge debolmente ma non fortemente. La successione $f_n = \mathcal{X}_{[n,n+1]}$ converge debolmente ad $f = 0$ in $L^2(0,\infty)$.

Infatti, per il Teorema 6.4.6 ogni funzionale lineare L su $L^2(0,\infty)$ si può rappresentare con una funzione $g \in L^2(0,\infty)$ e quindi $L(f_n) = \int_n^{n+1} g\ dx \to 0$ se $n \to \infty$, per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3, dato che $|\int_n^{n+1} g\ dx| \le \int_n^{n+1} g^2 dx$. D'altra parte $\|f_n - f\|_2 = \|f_n\|_2 = 1$ che non converge a zero.

6.5. Sottoinsiemi densi in $L^p(E)$ e separabilità

6.5.1. Due sottospazi densi. Una strategia molto fruttuosa per dimostrare proprietà delle funzioni negli spazi L^p consiste nel dimostrare tali proprietà per funzioni più regolari, sfruttando poi il fatto che tali funzioni approssimano le funzioni L^p con precisione arbitraria. In questo paragrafo, E indicherà un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^N$.

Teorema 6.5.1 (Le funzioni semplici sono dense in L^p)**.** *Sia $f \in L^p(E)$ con $1 \le p \le \infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice $s \in L^p(E)$ tale che $\|f - s\|_p < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Si può supporre che $f \ge 0$, dato che $f = f^+ - f^-$. Poiché f è misurabile e non negativa, esiste una successione crescente di funzioni semplici e non negative s_n che converge ad f puntualmente q.o. in E.

Sia $1 \le p < \infty$; allora $(f - s_n)^p \to 0$ q.o. in E e $(f - s_n)^p \le f^p$ con f^p sommabile in E. Per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3, risulta che $\|f - s_n\|_p^p = \int_E (f - s_n)^p\ dx \to 0$ se $n \to \infty$.

Se $p = \infty$, detto $E_* = \{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$, risulta che $m(E_*) = 0$ ed inoltre f è limitata in $E \setminus E_*$. Per come s_n è stata costruita, s_n converge uniformemente ad f in $E \setminus E_*$; perciò:

$$\|f - s_n\|_\infty = \sup_{E\setminus E_*} (f - s_n) \to 0$$

se $n \to \infty$. □

Teorema 6.5.2 (Le funzioni continue sono dense in L^p)**.** *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione g continua in $\mathbb{R}^N$ e nulla fuori di un compatto tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che $f \geq 0$ come prima. Inoltre, possiamo supporre che f sia nulla fuori di una pallina, dato che la successione $f\ \mathcal{X}_{B(0,n)}$ converge ad f in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Possiamo ancora supporre che f sia semplice: $f = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\ \mathcal{X}_{E_k}$ dove gli insiemi misurabili E_k sono a due a due disgiunti (e limitati). Basterà allora costruire per ogni k una funzione continua ed a supporto compatto g_k che approssimi $\mathcal{X}_{E_k}$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per meno di ε; infatti, la funzione $g = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\ g_k$ approssimerà f in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per meno di $\varepsilon \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|$, dato che

$$\|f - g\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k\ (\mathcal{X}_{E_k} - g_k) \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k|\ \|\mathcal{X}_{E_k} - g_k\|_p < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Poiché E_k è misurabile e limitato, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un chiuso $K \subseteq E_k$ ed un aperto limitato $A \supseteq E_k$ tali che $m(A) - m(K) < \varepsilon$.

Sia $g_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita per $x \in \mathbb{R}^N$ da

$$g_k(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus A)}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus A) + \operatorname{dist}(x, K)};$$

allora g_k è continua, $0 \leq g_k \leq 1$, $g_k \equiv 1$ su K e $g_k \equiv 0$ fuori di A.

Risulta allora:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X}_{E_k} - g_k\|_p^p \ &= \int\limits_A |\mathcal{X}_{E_k} - g_k|^p dx = \int\limits_{A \setminus K} |\mathcal{X}_{E_k} - g_k|^p dx \leq m(A \setminus K) = \\ &\quad m(A) - m(K) < \varepsilon,\end{aligned}$$

e quindi la dimostrazione è conclusa. □

6.5.2. Separabilità di $L^p(\mathbb{R}^N)$. Per alcuni risultati del Capitolo 5 era importante che lo spazio di Hilbert in esame fosse separabile.

Teorema 6.5.3 ($L^p(\mathbb{R}^N)$ è separabile)**.** *Esiste un insieme numerabile $\mathcal{F} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tali che, fissati un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^N$, un numero $p \in [1, \infty)$, una funzione $f \in L^p(E)$ ed un numero $\varepsilon > 0$, esiste $\phi_n \in \mathcal{F}$ tale che $\|f - \phi_n\|_{p,E} < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare la tesi per $E = \mathbb{R}^N$, dato che possiamo considerare come di solito $f\ \mathcal{X}_E$ se $f \in L^p(E)$.

Sia $\mathbb{Z}^N$ il reticolo dei punti di $\mathbb{R}^N$ a coordinate intere e sia $\mathcal{Q}$ la famiglia (numerabile) dei cubi

$$Q_{m,n} = \{x \in \mathbb{R}^N : 2^{-n} m_i < x_i \leq 2^{-n}(m_i + 1), i = 1, \ldots, N\},$$

dove $n \in \mathbb{N}$ ed $m = (m_1, \ldots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$. Si noti che $\mathbb{R}^N = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}^N} Q_{m,n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato.

Sia ora $\mathcal{F}_n$ la famiglia delle funzioni ϕ costanti a tratti con valori razionali su ogni $Q_{m,n}$ e che si annullano fuori dal cubo $\mathcal{C}_n = [-2^n, 2^n]^N$; $\mathcal{F}_n$ è numerabile, perché famiglia numerabile di famiglie numerabili. Per la stessa ragione, $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ è numerabile.

Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Per il Teorema 6.5.2, esiste g continua in $\mathbb{R}^N$ e nulla fuori di un compatto tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$; basta quindi trovare $\phi_n \in \mathcal{F}$ tale che $\|g - \phi_n\|_p < 2\varepsilon/3$. Sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che g sia nulla fuori di $\mathcal{C}_\nu$. Essendo g uniformemente continua in $\mathbb{R}^N$, per ogni $\eta > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|g(x) - g(y)| < \eta \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^N \ \text{tali che} \quad |x - y| < \delta.$$

Per ogni intero $n \geq \nu$, sia ψ la funzione definita

$$\psi = \sum_{Q_{n,m} \subset \mathcal{C}_\nu} c_{n,m} \, \mathcal{X}_{Q_{n,m}}, \quad \text{con} \quad c_{n,m} = 2^{-nN} \int_{Q_{m,n}} g \, dy,$$

cioè ψ su $Q_{m,n}$ è uguale al valor medio di g su $Q_{m,n}$. Si noti anche che $\psi \equiv 0$ fuori di $\mathcal{C}_\nu$.

Perciò, se $n \geq \nu$ è così grande che $2^{-n}\sqrt{N} < \delta$, risulta che

$$|g(x) - c_{n,m}| \leq 2^{-nN} \int_{Q_{m,n}} |g(x) - g(y)| \, dy < \eta \quad \text{su} \quad Q_{n,m}$$

e quindi $|g - \psi| < \eta$ su $\mathbb{R}^N$; pertanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g - \psi|^p \, dx = \int_{\mathcal{C}_\nu} |g - \psi|^p \, dx \leq \eta^p \, 2^{N(K+1)};$$

basta quindi scegliere $0 < \eta < 2^{-N(\nu+1)/p}\varepsilon/3$ per avere che $\|g - \psi\|_p < \varepsilon/3$.

Infine, dato che ψ ha in generale valori reali, scegliamo $\phi \in \mathcal{F}$ (a valori razionali) così:

$$\phi = \sum_{Q_{n,m} \subset \mathcal{C}_\nu} q_{n,m} \, \mathcal{X}_{Q_{n,m}} \quad \text{con} \quad q_{n,m} \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad |q_{n,m} - c_{n,m}| < \eta;$$

si avrà dunque che $\|\psi - \phi\|_p < \varepsilon/3$.

Concludendo, fissato $\varepsilon > 0$ abbiamo trovato $\phi \in \mathcal{F}$ tale che

$$\|f - \phi\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - \psi\|_p + \|\psi - \phi\|_p < \varepsilon.$$

Perciò $\mathcal{F}$ è densa in $L^p(\mathbb{R}^N)$ e quindi $L^p(\mathbb{R}^N)$ è separabile. $\square$

Lo spazio di Hilbert $L^2(E)$ è quindi separabile. Il caso in cui $p = \infty$ è differente.

Proposizione 6.5.4. *$L^\infty(\mathbb{R}^N)$ non è separabile.*

Dimostrazione. (i) Sia $\{E_r\}_{r\in\mathbb{R}_+}$ una famiglia (non numerabile) di insiemi misurabili tali che $m(E_r \Delta E_s) > 0$ per ogni $r, s > 0$ con $r \neq s$ (qui il simbolo Δ indica la differenza simmetrica dei due insiemi). Per esempio, basta scegliere $E_r = Q(0, r)$.

(ii) Per $r > 0$, sia $\mathcal{O}_r = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) : \|f - \mathcal{X}_{E_r}\|_\infty < \frac{1}{2}\}$. La famiglia di aperti $\mathcal{O}_r$ è non numerabile ed inoltre, per ogni $r, s > 0$ con $r \neq s$ si ha che $\mathcal{O}_r \cap \mathcal{O}_s = \varnothing$, dato che, se $f \in \mathcal{O}_r$, allora

$$\begin{aligned}\|f - \mathcal{X}_{E_s}\|_\infty &= \|\mathcal{X}_{E_r} - \mathcal{X}_{E_s} + f - \mathcal{X}_{E_r}\|_\infty \geq \\ &\|\mathcal{X}_{E_r} - \mathcal{X}_{E_s}\|_\infty - \|f - \mathcal{X}_{E_r}\|_\infty > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

cioè $f \notin \mathcal{O}_s$.

(iii) L'esistenza della famiglia $\{\mathcal{O}_r\}_{r\in\mathbb{R}_+}$ implica che $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ non è separabile. In caso contrario, se $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fosse una famiglia densa in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora per ogni $r > 0$ esisterebbe un intero $n(r)$ tale che $\|\mathcal{X}_{E_r} - \phi_{n(r)}\|_\infty < \frac{1}{2}$, cioè tale che $\phi_{n(r)} \in \mathcal{O}_r$.

L'applicazione $\mathbb{R} \ni r \mapsto n(r) \in \mathbb{N}$ è iniettiva; infatti se per $r \neq s$ fosse $n(r) = n(s)$, allora $\phi_{n(r)} = \phi_{n(s)} \in \mathcal{O}_r \cap \mathcal{O}_s = \varnothing$. Dunque, $\mathbb{R}_+$ sarebbe al più numerabile, perché in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.

Costa poco adattare questa dimostrazione al caso in cui $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme misurabile. $\square$

6.6. Approssimazione con funzioni regolari: convoluzioni

6.6.1. Convoluzioni. Siano $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$; definiamo la loro *convoluzione* con

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\, dy = g \star f(x) \tag{6.27}$$

per $x \in \mathbb{R}^N$ ogni volta che l'integrale sia convergente.

Osservazione 6.6.1. (i) È chiaro che se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ allora $f \star g$ è ben definita e limitata per la disuguaglianza di Hölder (6.4).

(ii) Si può indebolire l'ipotesi di (i) al punto da poter dimostrare che se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ allora $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ con

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Questo risultato passa sotto il nome di *disuguaglianza di Young* per le convoluzioni. Per esempio, se $p = q = 1$, allora $r = 1$.

Nel Teorema 6.6.2 dimostreremo la disuguaglianza di Young quando $q = 1$ (e quindi $r = p$).

(iii) Euristicamemte, una convoluzione è una somma pesata di traslazioni: se, per $y \in \mathbb{R}^N$, definiamo la *traslazione* $\mathcal{T}_y : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ con

$$(\mathcal{T}_y f)(x) = f(x - y), \tag{6.28}$$

risulta che

$$f \star g = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{T}_y f \; g \; dy.$$

Teorema 6.6.2. *Se $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ed $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per qualche $p \in [1, \infty)$, risulta che $g \star f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e sussiste la disuguaglianza di Young:*

$$\|g \star f\|_p \le \|g\|_1 \|f\|_p.$$

Dimostrazione. Risulta:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |g \star f|^p dx \;\; &\le \;\; \int_{\mathbb{R}^N} dx \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)||f(x-y)| \; dy \right)^p = \\ &\int_{\mathbb{R}^N} dx \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^{1/p'} |g(y)|^{1/p} |f(x-y)| \; dy \right)^p \le \\ &\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \; dy \right)^{p/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \; |f(x-y)|^p \; dy \right) \; dx\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g \star f|^p dx \le \|g\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \; |f(x-y)|^p \; dy \right) \; dx; \tag{6.29}$$

applicando il Teorema di Fubini 4.8.8 nella (6.29) ed il fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p \; dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p \; dy = \|f\|_p^p,$$

si ottiene pertanto:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g \star f|^p dx \le \|g\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p dx \right) dy = \|g\|_1^p \|f\|_p^p,$$

da cui segue la tesi. □

Osservazione 6.6.3. Possiamo sempre definire la convoluzione di funzioni definite su un qualsiasi insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^N$. Infatti, se $g \in L^1(E)$ ed $f \in L^p(E)$, poniamo:

$$g \star f = g \star (f \mathcal{X}_E).$$

Con questa definizione, il Teorema 6.6.2 implica:

$$\begin{aligned}\|g\star f\|_{p,E}^p &= \int_E |g\star(f\mathcal{X}_E)|^p dx \le \\ &\int_{\mathbb{R}^N} |g\star(f\mathcal{X}_E)|^p dx \le \|g\|_1^p \|f\mathcal{X}_E\|_{p,\mathbb{R}^N}^p = \\ &\|g\|_1^p\|f\|_{p,E}^p.\end{aligned}$$

Perciò vale il Teorema 6.6.2 anche se $f \in L^p(E)$.

6.6.2. Mollificatori. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Introduciamo le seguenti notazioni:

$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ continua in } \Omega\}$;
$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f\ k\text{-volte differenziabile con continuità in } \Omega\}$;
$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$;
$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \ne 0\}}$, se $f \in C(\Omega)$;
$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f = 0 \text{ fuori di qualche compatto } K \subset \Omega\}$;
$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;
$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

Infine, si dice che α è un *multi-indice* se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N$ con $\alpha_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, N$; si pone allora $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ e, se $f \in C^\infty(\Omega)$, si può definire una qualunque derivata parziale di ordine $|\alpha|$ di f come

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_N} x_N},\ x \in \Omega.$$

Un *mollificatore* è una famiglia ad un parametro $\varepsilon > 0$ di funzioni $j_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tali che:

$$\begin{gathered}\int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(y)\, dy = 1, \quad \sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\, dy < \infty, \\ \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\, dy = 0 \quad \text{per ogni} \quad \delta > 0.\end{gathered} \tag{6.30}$$

Osservazione 6.6.4. Sia $j \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $\int_{\mathbb{R}^N} j(x)\, dx = 1$; allora per $\varepsilon > 0$ la famiglia di funzioni

$$j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} j(x/\varepsilon)$$

è un mollificatore. Infatti le proprietà (6.30) si dimostrano applicando il semplice cambio di variabile $y = \varepsilon\, x$ ed osservando che l'integrale nella terza proprietà diventa

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\delta/\varepsilon)} |j(y)|\, dy$$

e tende a zero per $\varepsilon \to 0^+$ per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3.

Teorema 6.6.5. *Sia $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per qualche $p \in [1,\infty]$. Allora $j \star f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e risulta:*

$$D^\alpha(j \star f) = (D^\alpha j) \star f.$$

Dimostrazione. Questa asserzione segue dal Teorema 4.7.6 scegliendo

$$F(x,y) = j(x-y)f(y).$$

Infatti, se dobbiamo calcolare la derivata di $j \star f$ rispetto a x_k in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, basterà scegliere $A = B(x_0,\delta)$ per qualche $\delta > 0$ per ottenere che

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_k}(x,y)\right| \le |f(y)| \max_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial j}{\partial x_k}\right| \mathcal{X}_K(y)$$

per $x \in A$, dove K è un compatto contenente l'insieme $\operatorname{supp}(j)+[-B(x_0,\delta)]$.[1] La funzione a secondo membro è sommabile, infatti

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f|\ \mathcal{X}_K\ dy \le m(K)^{1/p'} \|f\|_p\ ;$$

quindi possiamo applicare il Teorema 4.7.6 ed ottenere il risultato voluto. La formula per le derivate successive si ottiene quindi per induzione sul numero di derivate parziali. □

Ciascun elemento di una famiglia di funzioni $j_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ che soddisfano le proprietà (6.30) si dice un *nucleo mollificatore.*

Esempio 6.6.6. Un esempio di funzione in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ è dato da:

$$j(x) = \begin{cases} c\ \exp\left\{\frac{1}{|x|^2-1}\right\} & \text{se} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{se} \quad |x| \ge 1. \end{cases}$$

Si può chiaramente scegliere la costante c in modo che $\int_{\mathbb{R}^N} j(x)\ dx = 1$.

6.6.3. Approssimazione. Incominciamo con il seguente importante lemma.

Lemma 6.6.7. *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$. Allora*

$$\sup_{|h|<\delta} \|\mathcal{T}_h f - f\|_p \to 0 \quad se \quad \delta \to 0^+.$$

[1]Se I e J sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ allora si definisce $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$.

Dimostrazione. (i) Sia $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$; allora f è uniformemente continua su $\mathbb{R}^N$ cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}^N$ con $|y - x| < \delta$. In particolare, si avrà che

$$|\mathcal{T}_h f(x) - f(x)| = |f(x-h) - f(x)| < \varepsilon$$

se $|h| < \delta$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Ciò significa che

$$\sup_{|h|<\delta} \|\mathcal{T}_h f - f\|_p \le m(K)^{1/p}\, \varepsilon,$$

dove K è un compatto che contiene $\mathrm{supp}(\mathcal{T}_h f)$ per ogni $|h| < \delta$. Ciò implica la tesi quando $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

(ii) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Preso $\delta > 0$ tale che $\|\mathcal{T}_h g - g\|_p < \varepsilon/3$ per $|h| < \delta$, otteniamo che

$$\|\mathcal{T}_h f - f\|_p \le \|\mathcal{T}_h f - \mathcal{T}_h g\|_p + \|\mathcal{T}_h g - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon$$

per ogni $|h| < \delta$, dato che $\|\mathcal{T}_h f - \mathcal{T}_h g\|_p = \|\mathcal{T}_h (f-g)\|_p = \|f - g\|_p$. □

Teorema 6.6.8 (Approssimazione in norma)**.** *Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e supponiamo che le funzioni j_ε soddisfino le proprietà* (6.30)*.*

(i) Sia $f \in L^p(E)$ per qualche $p \in [1, \infty)$. Allora $j_\varepsilon \star f \to f$ in $L^p(E)$ per $\varepsilon \to 0^+$.

(ii) Sia f uniformemente continua e limitata in E. Allora $j_\varepsilon \star f \to f$ uniformemente in E.

Dimostrazione. Si osservi preliminarmente che possiamo sempre supporre che $E = \mathbb{R}^N$ estendendo f a tutto $\mathbb{R}^N$; infatti abbiamo che

$$\int\limits_E |j_\varepsilon \star f - f|^p = \int\limits_E |j_\varepsilon \star (f\mathcal{X}_E) - f\mathcal{X}_E|^p dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon \star (f\mathcal{X}_E) - f\mathcal{X}_E|^p dx.$$

(i) Poiché $\int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(y)\, dy = 1$, allora

$$j_\varepsilon \star f(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\, dy.$$

Sostituendo $f(x-y) - f(x)$ al posto di $f(x-y)$ e j_ε al posto di g nella (6.29), otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon \star f - f|^p dx \ \le\ \|j_\varepsilon\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy =$$
$$\|j_\varepsilon\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\ \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p\, dy$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\ \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p\, dy = \\
&\int_{B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\ \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p\, dy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\ \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p\, dy \le \\
&\sup_{|y|<\delta} \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\, dy + 2^p \|f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\, dy,
\end{aligned}$$

per ogni $\delta > 0$.

La conclusione allora segue dal Lemma 6.6.7 e dalla seconda e terza proprietà in (6.30).

(ii) Sia $\omega(f, \delta)$ il modulo di continuità definito in (1.4). In modo analogo a prima abbiamo:

$$\begin{aligned}
&|j_\varepsilon \star f(x) - f(x)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)||f(x-y) - f(x)|\, dy = \\
&\int\limits_{B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\, dy \le \\
&\omega(f,\delta) \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\, dy + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\, dy.
\end{aligned}$$

Si conclude con le stesse argomentazioni di prima. □

I Teoremi 6.6.5 e 6.6.8 implicano senz'altro il seguente risultato notevole.

Corollario 6.6.9 (Approssimazione con funzioni C^∞)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Allora l'insieme $C^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ nella topologia della norma.*

Dimostrazione. Scegliamo $j_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-N} j(y/\varepsilon)$ con $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^N} j(y)\, dy = 1$. Per il Teorema 6.6.5, ogni $f \in L^p(\Omega)$ è allora approssimabile in $L^p(\Omega)$ con le funzioni $j_\varepsilon \star f$, che sono di classe $C^\infty(\Omega)$ per il Teorema 6.6.8 . □

Esempio 6.6.10. Sia $f = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$; è chiaro che $\overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, mentre $f = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$.

È evidente che la definizione di supporto che abbiamo dato per una funzione continua non è molto utile per la funzione $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$.

Sia allora $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e sia $\mathcal{F}$ la famiglia degli aperti $A \subseteq \mathbb{R}^N$ tali che $f = 0$ q.o. in A. Definiamo il *supporto essenziale* di f come l'insieme

$$\operatorname{supp}(f) = \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right).$$

D'ora in poi $\mathrm{supp}(f)$ indicherà il supporto essenziale di f che, se f è continua, coincide con il supporto ordinario.

Si noti che $\mathrm{supp}(f)$ è ben definito; infatti, anche se la famiglia $\mathcal{F}$ non fosse numerabile, esiste una base numerabile di aperti O_n tale che, se $A \in \mathcal{F}$, allora $A = \bigcup_{n \in J_A} O_n$, per qualche sottoinsieme J_A di $\mathbb{N}$. Se $f = 0$ q.o. in A, allora $f = 0$ q.o. in ogni O_n con $n \in J_A$ e quindi

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \bigcup_{n \in J_A} O_n = \bigcup_{n \in J} O_n,$$

dove $J = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} J_A$ è numerabile, essendo $J_A \subseteq \mathbb{N}$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.

Proposizione 6.6.11. *(i) Se $f_1 = f_2$ q.o. in $\mathbb{R}^N$ allora* $\mathrm{supp}(f_1) = \mathrm{supp}(f_2)$.

(ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\mathrm{supp}(f \star g) \subseteq \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}.$$

Dimostrazione. (i) È chiaro che $f_1 = 0$ q.o. in A se e solo se $f_2 = 0$ q.o. in A e quindi $\mathrm{supp}(f_1) = \mathrm{supp}(f_2)$.

(ii) Sia A il complementare di $\overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$; A è aperto e, se $x \in A$, risulta che l'insieme $B = (x - \mathrm{supp}(f)) \cap \mathrm{supp}(g)$ è vuoto. Perciò

$$\int_A |f \star g(x)|\, dx \le \int_A \Big(\int_B |f(x-y)\, g(y)|\, dy \Big)\, dx = 0.$$

Quindi $\mathrm{supp}(f \star g)$ è contenuto nel complementare di A. □

Osservazione 6.6.12. Se f e g hanno supporto limitato, allora anche $f \star g$ ha supporto limitato.

Teorema 6.6.13 (Approssimazione con funzioni C_0^∞)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Allora lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \le p < \infty$.*

In altre parole, fissata una funzione $f \in L^p(\Omega)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ come nell'Esempio 6.6.6. Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia $j_n(x) = n^N j(nx)$; risulta che $\mathrm{supp}(j_n) \subseteq \overline{B(0, 1/n)}$. Data $f \in L^p(\Omega)$, consideriamo $f\ \mathcal{X}_{\Omega_n}$, dove $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \ge \frac{2}{n} \text{ e } |x| \le n\}$; è chiaro che $\mathrm{supp}(g_n) \subseteq \Omega_n$.

Posto $f_n = j_n \star (f\ \mathcal{X}_{\Omega_n})$, abbiamo che $f_n \in C^\infty(\Omega)$, per il Teorema 6.6.2, ed inoltre $\mathrm{supp}(f_n) \subseteq \overline{B(0, 1/n) + \Omega_n} \subset \Omega$, per la Proposizione 6.6.11. Dunque $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ e si ha che

$$\begin{aligned}
&\|f_n - f\|_{p,\Omega} \le \|f_n - f\ \mathcal{X}_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N} \le \\
&\quad \|j_n \star (f\ \mathcal{X}_{\Omega_n}) - j_n \star (f\ \mathcal{X}_\Omega)\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|j_n \star (f\ \mathcal{X}_\Omega) - f\ \mathcal{X}_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N} \le \\
&\qquad \|(f\ \mathcal{X}_{\Omega_n}) - f\ \mathcal{X}_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|j_n \star (f\ \mathcal{X}_\Omega) - f\ \mathcal{X}_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

Il primo addendo converge a zero per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3, mentre il secondo converge a zero per il Teorema 6.6.2, dato che $f\,\mathcal{X}_\Omega \in L^p(\mathbb{R}^N)$. □

Con idee analoghe a quelle finora esposte in questo paragrafo, dimostriamo il seguente teorema di approssimazione uniforme.

Teorema 6.6.14. *Sia $f \in C^0_0(\mathbb{R}^N)$. Allora esiste una successione di polinomi P_n che convergono ad f uniformemente sul supporto di f.*

Dimostrazione. A meno di traslazioni e dilatazioni, possiamo supporre che il supporto S di f sia contenuto in $Q(0,1/2)$, il cubo centrato nell'origine, con semilato lungo $1/2$ e con lati paralleli agli assi coordinati.

Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo:

$$p_n(y) = \alpha_n^{-N} \prod_{i=1}^{N} (1-y_i^2)^n, \quad \alpha_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt.$$

Le funzioni p_n, se si estendono con zero fuori di $Q(0,1)$, sono non negative, di classe $C_0^{n-1}(\mathbb{R}^N)$ ed, in $Q(0,1)$, sono polinomi; la scelta di α_n ci dice inoltre che

$$\int_{Q(x,1)} p_n(x-y)\,dy = \int_{Q(0,1)} p_n(y)\,dy = 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Definiamo ora i *polinomi di Stieltjes* relativi ad f come:

$$P_n(x) = \int_{Q(0,1)} p_n(x-y) f(y)\,dy;$$

risulta:

$$P_n(x) - f(x) = \int_{Q(0,1)} p_n(x-y) f(y)\,dy - \int_{Q(x,1)} p_n(x-y) f(x)\,dy.$$

Per ogni $x \in S$, se scegliamo $\delta > 0$ tale che $Q(x,\delta) \subset Q(0,1)$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| \le & \int_{Q(x,\delta)} p_n(x-y)|f(y)-f(x)|\,dy + \\ & \left| \int_{Q(0,1)\setminus Q(x,\delta)} p_n(x-y) f(y)\,dy \right| + \left| \int_{Q(x,1))\setminus Q(x,\delta)} p_n(x-y) f(x)\,dy \right| \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| \le & \,\omega(f, \delta\sqrt{N}) + \\ & \max_{\mathbb{R}^N} |f| \left\{ \int_{Q(0,1)\setminus Q(x,\delta)} p_n(x-y)\,dy + \int_{Q(x,1)\setminus Q(x,\delta)} p_n(x-y)\,dy \right| . \end{aligned}$$

I due integrali a secondo membro si maggiorano tenedo conto che $x - y \notin Q(0, \delta)$ dato che $y \notin Q(x, \delta)$: esiste quindi $i \in \{1, \dots, N\}$ tale che $|x_i - y_i| \geq \delta/\sqrt{N}$ e quindi

$$p_n(x-y) \leq \alpha_n^{-N}(1-\delta^2/N)^n \leq 2^{-N}(n+1)^N(1-\delta^2/N)^n,$$

essendo

$$\alpha_n \geq 2\int_0^1 (1-t)^n \, dt = 2/(n+1).$$

In conclusione:

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \omega(f, \delta\sqrt{N}) + 2 \max_{\mathbb{R}^N} |f| \, (n+1)^N(1-\delta^2/N)^n, \quad x \in S;$$

questa disuguaglianza implica che P_n converge ad f uniformemente in S. □

Il teorema appena dimostrato è un caso particolare del più generale *teorema di approssimazione di Weierstrass.*

Teorema 6.6.15 (Weierstrass)**.** *Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su E.*

Esiste allora una successione di polinomi P_n che converge uniformemente ad f su E.

Dimostrazione. La dimostrazione segue le linee di quella del teorema precedente osservando che, per il Teorema di estensione 1.5.1, si può supporre che f sia uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}^N$. □

Corollario 6.6.16. *Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$. Lo spazio di Banach $C(K)$ delle funzioni continue su K con la norma del massimo è separabile.*

Dimostrazione. La famiglia dei polinomi nelle variabili $x_1, \dots, x_N$ con coefficienti razionali è una famiglia numerabile e, per il Teorema 6.6.15, è denso in $C(K)$. □

6.7. Compattezza in $L^p(X)$

6.7.1. Il teorema di Banach-Alaoglu. Premettiamo un esempio istruttivo.

Esempio 6.7.1. I sottoinsiemi limitati di $L^p(E)$ possono non essere relativamente compatti nella topologia indotta dalla norma. Per esempio, la Proposizione 5.3.4 implica che lo spazio di Hilbert $L^2[0, 2\pi]$ dovrebbe avere dimensione finita se ogni suo sottoinsieme limitato contenesse una sottosuccessione convergente. D'altra parte, esso non ha dimensione finita, perché contiene il sistema ortonormale formato dalle funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \;\; x \in [0, 2\pi], \;\; n \in \mathbb{N}.$$

In analogia con il Teorema 5.3.5, il seguente teorema ci assicura però che gli insiemi limitati sono compatti nella topologia della convergenza debole.

Teorema 6.7.2 (Banach-Alaoglu)**.** *Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e sia $1 < p < \infty$. Siano $f_n \in L^p(E), n \in \mathbb{N}$, e sia c una costante non negativa tale che*

$$\|f_n\|_p \leq c \quad \textit{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allora esiste una sottosuccessione di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge debolmente in $L^p(E)$ ad una funzione $f \in L^p(E)$.

Dimostrazione. La dimostrazione ripercorre quella del Teorema 5.3.5. Per il Teorema 6.4.6, ad ogni elemento L del duale $L^p(E)'$ di $L^p(E)$ corrisponde univocamente una funzione $g \in L^{p'}(E)$; inoltre $L^{p'}(E)$ è uno spazio separabile, cioè esiste una famiglia $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ numerabile densa in $L^{p'}(E)$.

Consideriamo allora la successione di numeri $\int_E f_n\ \phi_1\ dx$; essa è limitata, perché

$$\left|\int_E f_n\ \phi_1\ dx\right| \leq \|f_n\|_p \|\phi_1\|_{p'} \leq c\ \|\phi_1\|_{p'}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi contiene una sottosuccessione convergente, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass. Esiste perciò una successione $\{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ estratta da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\int_E f_n^1\ \phi_1\ dx$ converge ad un numero reale.

Ripetendo questo argomento sulla successione di numeri $\int_E f_n^1\ \phi_2\ dx$, possiamo dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{f_n^2\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\int_E f_n^2\ \phi_2\ dx$ converge ad un numero reale.

Iterando il ragionamento, possiamo affermare che, fissato $k \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{f_n^k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n^{(k-1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \cdots \subset \{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\int_E f_n^k\ \phi_k\ dx$ converge ad un numero reale. È chiaro che $\{f_n^j\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ se $j \geq k$, e quindi la successione di funzioni $\{f_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha la proprietà che la successione numerica $\int_E f_n^n\ \phi_k\ dx$ converge per ogni intero k e dunque è una successione di Cauchy per ogni k.

Definiamo allora il funzionale $L : L^{p'}(E) \to \mathbb{R}$ con la formula:

$$L(g) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n^n\ g\ dx,\ \ g \in L^{p'}(E).$$

Il funzionale L è ben definito dato che la successione $\int\limits_E f_n^n\ g\ dx$ è di Cauchy.

Infatti per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\Big|\int_E f_n^n\ g\ dx - \int_E f_m^m\ g\ dx\Big| \leq \Big|\int_E f_n^n\ g\ dx - \int_E f_n^n\ \phi_k\ dx\Big| +$$

$$\Big|\int_E f_n^n\ \phi_k\ dx - \int_E f_m^m\ \phi_k\ dx\Big| + \Big|\int_E f_m^m\ \phi_k\ dx - \int_E f_m^m\ g\ dx\Big| \leq$$

$$\|f_n\|_p\|g-\phi_k\|_{p'} + \Big|\int_E f_n^n\ \phi_k\ dx - \int_E f_m^m\ \phi_k\ dx\Big| + \|f_m\|_p\|g-\phi_k\|_{p'}$$

e quindi

$$\Big|\int_E f_n^n\ g\ dx - \int_E f_m^m\ g\ dx\Big| \leq 2\ c\ \|g-\phi_k\|_{p'} + \Big|\int_E f_n^n\ \phi_k\ dx - \int_E f_m^m\ \phi_k\ dx\Big|.$$

Ora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\|g-\phi_k\|_{p'} < \varepsilon/4c$; in corrispondenza di questo k esiste ν tale che $\left|\int_E f_n^n\ \phi_k\ dx - \int_E f_m^m\ \phi_k\ dx\right| < \varepsilon/2$ per $n, m > \nu$. Perciò , se $n, m > \nu$ otteniamo che

$$\left|\int_E f_n^n\ g\ dx - \int_E f_m^m\ g\ dx\right| < 2c\ \frac{\varepsilon}{4c} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

È chiaro che L è lineare; inoltre L è limitato dalla costante c, dato che

$$\left|\int_E f_n^n\ g\ dx\right| \leq c\ \|g\|_{p'}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi $L \in L^{p'}(E)'$; esiste perciò $f \in L^p(E)$ tale che $L(g) = \int_E f\ g\ dx$ per ogni $g \in L^{p'}(E)$.

In conclusione, per ogni $g \in L^{p'}(E)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n^n\ g\,dx = \int_E f\,g\,dx,$$

se $n \to \infty$, cioè $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$. □

Esempio 6.7.3. In sostanza, oltre alla separabilità di $L^{p'}(E)$, abbiamo usato il fatto che, per $p \in (1, \infty)$, il duale di $L^{p'}(E)$ è $L^p(E)$. Questo teorema non è vero negli spazi $L^1(E)$ ed $L^\infty(E)$.

Si consideri, per esempio, la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_n = n\ \mathcal{X}_{[0,1/n]}$. Risulta che $\|f_n\|_1 = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se una qualche sottosuccessione di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, indichiamola ancora con $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergesse debolmente ad una $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora f sarebbe nulla quasi ovunque. Sia infatti $[a,b]$ un intervallo limitato e sia $g = \mathrm{sgn}(f)\ \mathcal{X}_{\{x\in[a,b]:f(x)\neq 0\}}$; risulta che $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ e quindi

$$\int_a^b |f|\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n\ g\ dx.$$

Se $0 \notin [a,b]$, ne segue che $\int_a^b |f|\ dx = 0$; quindi $f = 0$ q.o. in ogni intervallo $[a,b]$ che non contiene 0 e dunque $f = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$.

D'altra parte, la funzione costante $g = 1$ è un elemento di $L^\infty(\mathbb{R})$; dato che $f_n \rightharpoonup 0$ si avrebbe allora che $\int_{\mathbb{R}} 1 \cdot f_n\ dx \to 0$, mentre $\int_{\mathbb{R}} 1 \cdot f_n\ dx = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6.7.2. Il teorema di Ascoli-Arzelà. Sia (X,d) uno spazio metrico completo. Ricordiamo che l'insieme $C(X)$ delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ continue (e limitate se X non fosse compatto) in X è uno spazio di Banach con la norma definita da

$$\|f\|_\infty = \sup_X |f|.$$

In particolare, ogni successione uniformemente di Cauchy in X converge uniformemente in X ad una funzione $f \in C(X)$.

Sia (X,d) uno spazio metrico completo; si dice che una successione di funzioni continue f_n è *equilimitata* in X se esiste una costante $c \geq 0$ tale che

$$|f_n(x)| \leq c \quad \text{per ogni} \quad x \in X \text{ ed } n \in \mathbb{N}.$$

Si dice che essa è *equicontinua* in X se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in X$ tale che $d(x,y) < \delta$, risulta:

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $\omega(f,\delta)$ indica il modulo di continuità di f definito da (1.4) con $E = X$, allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua in X se e solo se

$$\sup\{\omega(f_n,\delta) : n \in \mathbb{N}\} \to 0 \quad \text{per} \quad \delta \to 0^+.$$

Teorema 6.7.4 (Ascoli-Arzelà)**.** *Sia (X,d) uno spazio metrico completo e separabile e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in X equilimitata ed equicontinua in X.*

Allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una sottosuccessione che converge uniformemente in ogni insieme compatto $K \subset X$.

Dimostrazione. Poiché X è separabile, esiste una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ che è densa in X.

La successione dei numeri $f_n(x_1)$ è evidentemente limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $\{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f_n^1(x_1)$ converge per $n \to \infty$ ad un numero reale.

Anche la successione dei numeri $f_n^1(x_2)$ è limitata; possiamo quindi estrarre una sottosuccessione $\{f_n^2\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f_n^2(x_2)$ converge per $n \to \infty$ ad un numero reale. Iterando il ragionamento, possiamo affermare che, fissato $k \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{f_n^k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n^{(k-1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \cdots \subset \{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f_n^k(x_k)$ converge ad un numero reale.

Osserviamo che, se $j \geq k$, risulta $\{f_n^j\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, la successione di funzioni $\{f_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tale che $f_n^n(x_k)$ converge ad un numero reale e perciò è una successione di Cauchy.

Fissiamo ora $\varepsilon > 0$; poiché $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua in X, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in X$ tale che $d(x,y) < \delta$, risulta:

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sia ora $K \subset X$ un insieme compatto. Poiché gli x_k sono densi in X, K si può ricoprire con palline di raggio δ centrate negli x_k. Poiché K è compatto, possiamo dire che esistono $x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}$ tali che

$$K \subset \bigcup_{r=1}^{s} B(x_{k_r}, \delta).$$

Quindi, per ogni $x \in K$ esiste $r \in \{1, \ldots, s\}$ tale che $d(x, x_{k_r}) < \delta$.

Ogni successione $\{f_n^n(x_{k_r})\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, cioè esiste ν_r tale che

$$|f_n^n(x_{k_r}) - f_m^m(x_{k_r})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per ogni} \quad n, m > \nu_r.$$

Prendiamo $\nu = \max(\nu_1, \ldots, \nu_s)$; allora, per ogni $x \in K$, se $n, m > \nu$, preso x_{k_r} tale che $d(x, x_{k_r}) < \delta$, risulta che

$$\begin{aligned} |f_n^n(x) - f_m^m(x)| \leq \\ & |f_n^n(x) - f_n^n(x_{k_r})| + |f_n^n(x_{k_r}) - f_m^m(x_{k_r})| + |f_m^m(x_{k_r}) - f_m^m(x)| < \\ & |f_n^n(x) - f_n^n(x_{k_r})| + \frac{\varepsilon}{3} + |f_m^m(x_{k_r}) - f_m^m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

dove nella seconda disuguaglianza si è usato il fatto che le f_n^n formano una successione di Cauchy in x_{k_r}, mentre la terza disuguaglianza segue dalla equicontinuità delle f_n^n e f_m^m.

In definitiva, abbiamo dimostrato che $\{f_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy uniformemente in K e quindi essa converge uniformemente in K ad una funzione continua in K. □

6.7.3. Il teorema di Riesz-Fréchet-Kolmogorov. Il seguente teorema caratterizza i sottoinsiemi relativamente compatti nella topologia (forte) generata dalla norma $L^p(E)$.

Teorema 6.7.5 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). *Sia $1 \le p < \infty$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^p(\mathbb{R}^N)$ tale che*

(i) esiste una costante $c \ge 0$ tale che $\|f_n\|_p \le c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\sup\{\|\mathcal{T}_h f_n - f_n\|_p : n \in \mathbb{N}\} \to 0$ se $|h| \to 0$.

Allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una sottosuccessione che converge in $L^p(E)$ per ogni sottoinsieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^N$ con $m(E) < \infty$.

Dimostrazione. Useremo qui di seguito il modulo di p-continuità relativo alla successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\omega_p(\delta) = \sup\{\|\mathcal{T}_h f_n - f_n\|_p : |h| < \delta, n \in \mathbb{N}\}.$$

(1) Sia $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $j \ge 0$, $\mathrm{supp}(j) \subseteq \overline{B(0,1)}$ e $\int_{\mathbb{R}^N} j(x)\, dx = 1$ (si veda la dimostrazione del Teorema 6.6.13). Allora $j_k(x) = k^N j(kx)$ ha supporto contenuto in $\overline{B(0,1/k)}$.

La disuguaglianza di Hölder implica che

$$\begin{aligned} |j_k \star f_n(x) - f_n(x)|^p \;&\le\; \left(\int_{\mathbb{R}^N} j_k(y)^{1/p'}\, j_k(y)^{1/p} |f_n(x-y) - f_n(x)|\, dy\right)^p \le \\ &\int_{\mathbb{R}^N} j_k(y)\, |f_n(x-y) - f_n(x)|^p\, dy, \end{aligned}$$

dato che $\int_{\mathbb{R}^N} j_k(x)\, dx = 1$. Per il Teorema di Fubini 4.8.8, si ha:

$$\begin{aligned} \|j_k \star f_n - f_n\|_p^p \;&\le\; \int_{\mathbb{R}^N} j_k(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x)|^p\, dx\right) dy = \\ &\int_{B(0,1/k)} j_k(y)\, \|\mathcal{T}_y f_n - f_n\|_p^p\, dy \le \omega_p(1/k)^p, \end{aligned}$$

e quindi

$$\|j_k \star f_n - f_n\|_p \le \omega_p(1/k).$$

(2) Per la disuguaglianza di Hölder, otteniamo che

$$|j_k \star f_n(x)| \le \int_{\mathbb{R}^N} j_k(y) |f_n(x-y)|\, dy \le \|j_k\|_{p'} \|f_n\|_p,$$

e quindi

$$\|j_k \star f_n\|_\infty \le c\, \|j_k\|_{p'},$$

per l'ipotesi (i). Dunque la successione di funzioni $\{j_k \star f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equilimitata in $\mathbb{R}^N$.

Inoltre

$$\|\nabla(j_k \star f_n)\|_\infty = \|(\nabla j_k) \star f_n\|_\infty \leq \|\nabla j_k\|_{p'} \|f_n\|_p \leq c\ \|\nabla j_k\|_{p'};$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ con $|x - y| < \delta$, l'ultima disuguaglianza ed il Teorema di Lagrange implicano che

$$|j_k \star f_n(x) - j_k \star f_n(y)| \leq |(\nabla j_k \star f_n)(\theta x + (1-\theta)y)||x - y| \leq c\ \|\nabla j_k\|_{p'}\ \delta,$$

e quindi

$$\sup\{\omega_\infty(j_k \star f_n, \delta) : n \in \mathbb{N}\} \leq c\ \|\nabla j_k\|_{p'}\ \delta,$$

ossia la successione di funzioni $\{j_k \star f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua in $\mathbb{R}^N$.

(3) Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e di misura finita e sia K un compatto contenuto in E. Per quanto dimostrato ai punti (1) e (2), risulta allora che

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{p,E\setminus K} \quad \leq \quad & \|f_n - j_k \star f_n\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|j_k \star f_n\|_{p,E\setminus K} \leq \\ & \omega_p(1/k) + \|j_k \star f_n\|_\infty\ m(E \setminus K)^{1/p} \leq \\ & \omega_p(1/k) + c\ \|j_k\|_{p'}\ m(E \setminus K)^{1/p}. \end{aligned}$$

(4) Fissiamo $\varepsilon > 0$; per l'ipotesi (ii) possiamo scegliere un intero k tale che $\omega_p(1/k) < \varepsilon$; inoltre esiste K compatto tale che $m(E \setminus K)^{1/p} < \varepsilon$.

Per quanto dimostrato nel punto (2), la successione $\{j_k \star f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa su K le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzelà 6.7.4. Esiste perciò una sottosuccessione, che continueremo ad indicare con gli stessi indici, che converge uniformemente su K e quindi in norma $L^p(K)$. Esiste quindi ν tale che

$$\|j_k \star f_n - j_k \star f_m\|_{p,K} < \varepsilon$$

per ogni $n, m > \nu$.

(5) Pertanto, se $n, m > \nu$, applicando i punti (1)-(4) quando necessario, si ottiene la seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{p,E} \quad \leq & \\ & \|f_n - j_k \star f_n\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|j_k \star f_n - j_k \star f_m\|_{p,E} + \|f_m - j_k \star f_m\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq \\ & 2\ \omega_p(1/k) + \|j_k \star f_n - j_k \star f_m\|_{p,K} + \|j_k \star f_n - j_k \star f_m\|_{p,E\setminus K} < \\ & 2\varepsilon + \varepsilon + \|f_n - f_m\|_{p,E\setminus K} \leq 3\varepsilon + \|f_n\|_{p,E\setminus K} + \|f_m\|_{p,E\setminus K} \leq \\ & 3\varepsilon + 2\ \omega_p(1/k) + 2c\ \|j_k\|_{p'}\ m(E \setminus K)^{1/p} < \\ & 3\varepsilon + 2\varepsilon + 2c\ \|j_k\|_{p'}\ \varepsilon = (5 + 2c\ \|j_k\|_{p'})\ \varepsilon. \end{aligned}$$

Concludendo, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $L^p(E)$ e dunque converge nella norma di $L^p(E)$. $\square$

Osservazione 6.7.6. Nelle ipotesi del Teorema 6.7.5, se $m(E) = \infty$, non è detto che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenga una successione convergente in $L^p(E)$.

Corollario 6.7.7. *Se* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *soddisfa le ipotesi del Teorema 6.7.5 e se, per ogni* $\varepsilon > 0$, *esiste* $E \subset \mathbb{R}^N$ *limitato, misurabile e tale che* $\|f_n\|_{p,\mathbb{R}^N\setminus E} < \varepsilon$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *allora* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *contiene una sottosuccessione che converge in* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Basta riadattare il punto (4) della dimostrazione del Teorema 6.7.5. □

6.8. Confronti tra convergenze

È istruttivo confrontare i vari tipi di convergenze fin qui definite. Per completare il quadro introduciamo un ulteriore tipo di convergenza.

6.8.1. Convergenza in misura. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili in un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e quasi ovunque finite. Si dice che f_n *converge in misura* ad f se, posto

$$E_{\delta,n} = \{x \in E \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}, \ \delta > 0, \ n \in \mathbb{N},$$

risulta che

$$\lim_{n\to\infty} m(E_{\delta,n}) = 0$$

per ogni $\delta > 0$.

Teorema 6.8.1. *Se una successione di funzioni misurabili* f_n *converge in misura ad* f *in* E, *allora esiste una sua sottosuccessione che converge quasi ovunque ad* f *in* E.

Dimostrazione. Se f_n converge in misura ad f, significa che per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ esiste ν tale che

$$m(E_{\delta,n}) < \varepsilon$$

per ogni $n \geq \nu$. Prendiamo $\varepsilon = \delta = 2^{-k}$ con $k \in \mathbb{N}$. Per ogni k esiste allora un ν_k tale che $\nu_k > \nu_{k-1}$ e

$$m(E_{2^{-k},\nu_k}) < 2^{-k}.$$

Se poniamo $F_m = \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} E_{2^{-k},\nu_k}$ e se $x \notin F_m$, allora $|f(x) - f_{\nu_k}(x)| < 2^{-k}$ per ogni $k \geq m$ e quindi $f_{\nu_k}(x)$ converge a $f(x)$.

Sia $F = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m$. Se $x \notin F$, allora esiste m tale che $x \notin F_m$ e quindi $f_{\nu_k}(x) \to f(x)$. Osserviamo ora che

$$m(F) \leq m(F_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} m(E_{2^{-k},\nu_k}) < 2^{-m+1}$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$, e quindi $m(F) = 0$. □

Osservazione 6.8.2. Utilizzando questa proposizione, in modo completamente analogo a quello usato per la convergenza in L^p, possiamo dimostrare che se una successione è di Cauchy in misura allora converge in misura.

Osservazione 6.8.3. Il Lemma di Fatou, il Teorema di Beppo Levi e quello della Convergenza Dominata rimangono validi se la convergenze quasi ovunque è rimpiazzata dalla convergenza in misura.

Questo risultato segue dall'osservazione che, data una successione di numeri reali a_n allora $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ se e solo se ogni sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha a sua volta una sottosuccessione che converge ad a. Infatti, se a_n converge ad a, ogni sua sottosuccessione converge ad a. Viceversa, le sottosuccessioni che convergono al limite inferiore e superiore hanno sottosuccessioni convergenti ad a, quindi limite inferiore e limite superiore coincidono con a.

Qui di seguito, come esempio, diamo la dimostrazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Proposizione 6.8.4 (Teorema della converganza dominata)**.** *Sia f_n una successione che converge in misura ad f in E e supponiamo $|f_n| \le g$ in E con g sommabile in E. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx.$$

Dimostrazione. Siano $a_n = \int_E f_n \, dx$ ed $a = \int_E f \, dx$. Sia a_{n_k} una qualunque sottosuccessione; questa corrisponde ad una sottosuccessione f_{n_k} che converge ancora in misura ad f ed è ancora dominata da g. Per il Teorema 6.8.1, esiste una sottosuccessione estratta da f_{n_k}, che indichiamo ancora con f_{n_k}, che converge quasi ovunque ad f. Per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3, allora $a_{n_k} \to a$. Perciò ogni sottosuccessione di a_n contiene una sottosuccessione che converge ad a, quindi $a_n \to a$, cioè la tesi. □

6.8.2. Quattro tipi di convergenza. Riassumendo quindi, per una successione di funzioni misurabili, conosciamo quattro modi di convergere diversi: quasi ovunque, in misura, in norma L^p e debolmente in L^p; concludiamo questo paragrafo mettendoli a confronto.

Sappiamo già che, se una successione converge in norma L^p, allora essa converge debolmente in L^p.

Proposizione 6.8.5. *Sia E un insieme di misura finita. Allora, ogni successione di funzioni misurabili in E che converge quasi ovunque in E, converge anche in misura allo stesso limite.*

Dimostrazione. Si può sempre supporre che $E = \{x \in E : f_n(x) \to f(x)\}$. Quindi, poiché f_n converge ad f in E, risulta che

$$E = \liminf_{n\to\infty}(E \setminus E_{\delta,n})$$

per ogni $\delta > 0$.

Perciò, per l'Esercizio 8 del Capitolo 2, si ha:

$$m(E) \leq \liminf_{n\to\infty} m(E \setminus E_{\delta,n}) = m(E) - \limsup_{n\to\infty} m(E_{\delta,n}).$$

Dato che $m(E) < \infty$, si conclude che

$$\limsup_{n\to\infty} m(E_{\delta,n}) \leq 0$$

per ogni $\delta > 0$. $\square$

Proposizione 6.8.6. *Se una successione converge in $L^p(E)$, allora converge anche in misura in E allo stesso limite.*

Dimostrazione. Fissato $\delta > 0$, risulta per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_E |f_n - f|^p \; dx \geq \int_{E_{\delta,n}} |f_n - f|^p \; dx \geq \delta^p \, m(E_{\delta,n}),$$

e quindi $m(E_{\delta,n}) \to 0$ se $n \to \infty$. $\square$

Proposizione 6.8.7. *Se f_n converge debolmente ad f in $L^p(E)$ con $1 \leq p < \infty$, allora*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

per quasi ogni $x \in E$.

In particolare, se f_n converge anche q.o. ad una funzione g in E, si ha che $g = f$ q.o. in E.

Dimostrazione. Possiamo sempre supporre che $f \equiv 0$ q.o. in E.

Per ogni $F \subset E$ con $m(F) < \infty$, dato che $\mathcal{X}_F \in L^{p'}(E)$ e $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_F f_n \, dx = \int\limits_F f \, dx. \tag{6.31}$$

Siano ora

$$L'(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{ed} \quad F' = \{x \in F : L'(x) > 0\};$$

posto $E_n = \{c \in F : f_n(x) \geq 0\}$, il Lemma di Fatou implica che

$$0 \leq \int\limits_{F'} L'(x) \, dx = \int\limits_{F'} \liminf_{n\to\infty}(f_n \mathcal{X}_{E_n}) \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{F'} f_n(x) \, dx = 0,$$

dato che F' è misurabile e di misura finita. Perciò $L' \leq 0$ quasi ovunque in ogni $F \subseteq E$ di misura finita e quindi in tutto E.

Infine, se $f_n \rightharpoonup 0$ anche $-f_n \rightharpoonup 0$ e quindi

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = -\liminf_{n\to\infty}[-f_n(x)] \geq 0 = f(x)$$

per quasi ogni $x \in E$. □

Proposizione 6.8.8. *Sia f_n una successione di funzioni misurabili in E che convergono debolmente in $L^p(E)$ ad f e in misura a g in E. Allora $f = g$ quasi ovunque in E.*

Dimostrazione. Esiste una sottosuccessione di f_n che converge quasi ovunque a g in E e che ancora converge debolmente in $L^p(E)$ ad f. Dalla proposizione precedente segue che $f = g$ quasi ovunque in E. □

Esempio 6.8.9. (1) Esistono successioni di funzioni che convergono in misura ma non convergono quasi ovunque.

Per esempio, definiamo

$$f_{k,n} = \mathcal{X}_{\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]}, \text{ per } n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

La successione $f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \ldots$ converge in misura a zero in $[0,1]$, dato che

$$m\{x \in [0,1] : |f_{k,n}(x)| \geq \delta\} = \begin{cases} 0, & \text{se } \ \delta \geq 1, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{se } \ 0 < \delta < 1, \end{cases}$$

ma non converge in nessun punto di $[0,1]$: per ogni $x \in [0,1]$ possiamo trovare due sottosuccessioni che convergono a limiti diversi.

(2) Esistono successioni di funzioni che convergono debolmente in L^p ma non convergono in misura.

Sia per esempio $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{\pi}$, $x \in [0, 2\pi]$. Abbiamo già osservato che le f_n formano un sistema ortonormale in $L^2[0, 2\pi]$. Per la disuguaglianza di Bessel allora

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \widehat{g}(n)^2 \leq \|g\|_2^2 \ \text{ per ogni } \ g \in L^2[0, 2\pi].$$

Ciò significa che per ogni $g \in L^2[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\, g(x)\, dx = \widehat{g}(n) \to 0 \ \text{ per } \ n \to \infty,$$

cioè f_n converge debolmente a 0.

D'altra parte, se f_n convergesse in misura, allora convergerebbe a zero per la Proposizione 6.8.8, ma

$$m(\{x \in [0, 2\pi] : |f_n(x)| \geq 1/2\}) = \frac{4\pi}{3}$$

non converge a zero.

Si osservi infine che tale successione non può convergere quasi ovunque, dato che non converge in misura.

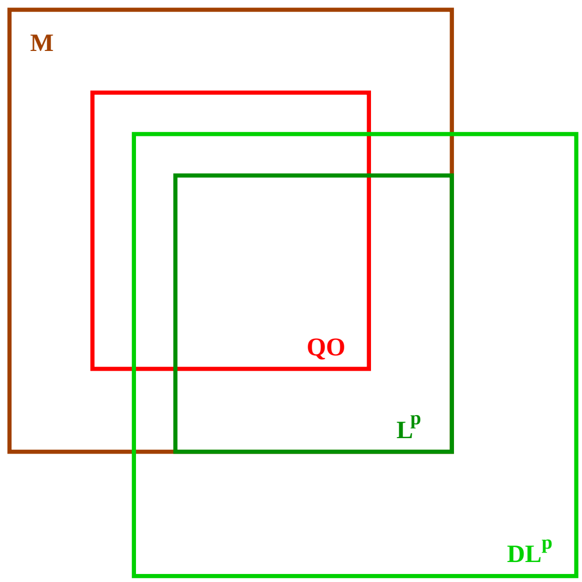

Figura 4. Confronto tra convergenze.

(3) Esistono successioni di funzioni che convergono in misura ma non debolmente in L^p.

Infatti la successione $f_n(x) = n\mathcal{X}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$ converge in misura in $[0, 1]$. Se essa convergesse debolmente allora convergerebbe a zero per la Proposizione 6.8.8, ma, dato che $1 \in L^{p'}[0, 1]$ e $\int_0^1 f_n \cdot 1 \; dx = 1$, essa non converge debolmente a zero in $L^p[0, 1]$.

(4) Esistono successioni di funzioni che convergono q.o. ma non debolmente in L^p.

Infatti la successione dell'esempio precedente fornisce un controesempio.

(5) Esistono successioni di funzioni che convergono in L^p ma non convergono quasi ovunque.

Infatti la successione dell'esempio (1) fornisce un controesempio.

Le implicazioni fra i vari tipi di convergenza (nel caso in cui la misura di E sia finita) si possono schematizzare nel diagramma in Figura 7.

Esercizi

Nei seguenti esercizi, E indica un qualsiasi sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$.

1. Dimostrare che ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$ è separabile.
2. Siano p, q, r tre numeri maggiori o uguali ad 1 tali che
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \,.$$
Dimostrare che se $f \in L^p(E)$ e $g \in L^q(E)$ allora $fg \in L^r(E)$ e
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$
3. Sia $p \in [1, \infty)$. Dimostrare che se g è misurabile e tale che $fg \in L^p(E)$ per ogni $f \in L^p(E)$ allora $g \in L^\infty(E)$.
4. Sia $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Dimostrare che l'insieme $E_0 = \{x \in E : g(x) > \operatorname*{ess\,sup}_E g\}$ ha misura nulla e che
$$\operatorname*{ess\,sup}_E g = \sup_{E \setminus E_0} g.$$
5. Dimostrare che $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
6. Lo spazio $L^p(E)$ si può ugualmente definire anche per $p \in (0, 1)$.
   (i) Dimostrare che $L^p(E)$ è uno spazio vettoriale;
   (ii) dimostrare che $L^p(E)$ è uno spazio metrico con distanza definita da
$$d_p(f, g) = \int_E |f - g|^p dx.$$
7. Dimostrare che $L^1(E)$ e $L^\infty(E)$ non sono uniformemente convessi.
8. Sia t la successione a termini reali $\{t_1, t_2, \ldots, t_r, \ldots\}$ e si ponga
$$\|t\|_{l_p} = \left(\sum_{r=1}^{\infty} |t_r|^p \right)^{1/p} .$$
Si indica con l_p lo spazio delle successioni t con $\|t\|_{l_p} < \infty$. Provare che l_p è uno spazio lineare, normato con la norma $\|\cdot\|_{l_p}$. Provare che l_p è completo e separabile.
9. Calcolare la convoluzione di $f = \mathcal{X}_{[-a,a]}$ con sé stessa. Calcolare anche la convoluzione di f con la funzione $g(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1 + x^2}$.
10. Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ con $p > 1$ e $1/p + 1/p' = 1$. Dimostrare che la convoluzione $f \star g$ è una funzione continua in $\mathbb{R}^N$ che tende a zero se $|x| \to \infty$.

11. Sia $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfacente all'ipotesi (i) del Teorema 6.7.5. Dimostrare che esiste una sottosuccessione di $\{g \star f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge in $L^p(E)$ per ogni sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ di misura finita.
12. Siano $1 < p < \infty$, $f \in L^p((0,\infty))$ e
$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \quad 0 < x < \infty.$$
   (i) Dimostrare la disuguaglianza di Hardy
$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$[2]
   (ii) Provare che vale il segno di uguaglianza solo se $f = 0$ q.o.
   (iii) Provare che la costante $\frac{p}{p-1}$ non può essere sostituita da una più piccola.
   (iv) Se $f > 0$ e $f \in L^1((0,+\infty))$, mostrare che $F \notin L^1((0,+\infty))$.
13. Sia E misurabile con $m(E) = 1$. Sappiamo che $\|f\|_{L^r(E)} \leq \|f\|_{L^s(E)}$ se $0 < r < s \leq \infty$.
   (i) Sotto quali condizioni si ha $\|f\|_{L^r(E)} = \|f\|_{L^s(E)}$ con $0 < r < s \leq \infty$?
   (ii) Supponendo $\|f\|_{L^r(E)} < \infty$ per qualche $r > 0$, provare che
$$\lim_{p\to 0}\|f\|_{L^p(E)} = \exp\left\{\int_E \log|f|\,dx\right\}.$$[3]

[2] *Suggerimento:* dimostrare prima il risultato, per f non negativa, continua ed a supporto compatto, integrando per parti.

[3] Si conviene che $e^{-\infty} = 0$.

Capitolo 7

Funzioni di una variabile complessa

7.1. Richiami di algebra, topologia ed integrazione su curve

In questa sezione, riassumiamo le nozioni di base sui numeri complessi e sulla topologia del piano complesso.

7.1.1. Numeri complessi e loro proprietà salienti. Il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è l'insieme deile coppie ordinate $z = (x, y)$ di nuneri reali dotato delle operazioni di somma e di prodotto definite rispettivamente da:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Il numero $i = (0, 1)$ per esempio è tale che $i^2 = i \cdot i = (-1, 0)$; si dice che i è l'*unità immaginaria* di $\mathbb{C}$. Mediante i un numero complesso $z = (x, y)$ si può indicare nella forma più conveniente $z = x + iy$. I numeri reali x e y si dicono rispettivamente le *parte reale* e la *parte immaginaria* di z e si indicano con $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$.

Ad ogni numero complesso $z = x + iy$ è associato il suo *coniugato* $\overline{z} = x - iy$, che è anch'esso un numero complesso; risulta allora che

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i};$$

è chiaro dalla seconda formula che $\overline{z} = z$ se e solo se $z \in \mathbb{R}$. È facile verificare che

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \text{e} \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

Il *modulo* di un numero complesso z è il numero non-negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}$; risulta quindi chiaro che, se $z \neq 0$, il reciproco (l'inverso rispetto al prodotto) di z, $1/z$, è anch'esso un numero complesso dato che

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Il modulo ha le seguenti proprietà:

$$|z| \geq 0 \quad \text{e} \quad |z| = 0 \;\text{ se e solo se }\; z = 0;$$
$$|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$$
$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|,$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{e} \quad |z_1 - z_2| \leq \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

È chiaro che le prime due formule e l'ultima implicano che il modulo definisce una norma su $\mathbb{C}$ e quindi una distanza.

È spesso utile rappresentare un numero complesso in *forma trigonometrica*:

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta);$$

per $z \neq 0$, l'angolo θ è determinato a meno di multipli interi di 2π ed ogni suo valore si dice *argomento* di z e si scrive $\theta = \arg z$. È facile dimostrare la seguente utile formula:

$$z_1\, z_2 = |z_1|\,|z_2|\big[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big].$$

Da questa segue che $\arg(1/z) = -\arg z$ e quindi l'angolo orientato fra i due vettori corrispondenti a due numeri complessi non nulli z_1 e z_2 non è altro che

$$\arg z_1 - \arg z_2 = \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1\overline{z_2}. \tag{7.1}$$

È molto utile usare la seguente formula che si può dimostrare scrivendo le serie di Taylor delle funzioni in gioco:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

7.1.2. Topologia di $\mathbb{C}$ e sfera di Riemann. Come si è accennato, la coppia $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ definisce uno spazio metrico, che facilmente risulta completo. Si possono quindi definire in $\mathbb{C}$ i concetti usuali di convergenza di successioni e di serie di numeri complessi e, di conseguenza, di continuità di una funzione, con le sole puntualizzazioni seguenti:

(i) data una successione di numeri complessi z_n, si scrive che

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$

se per ogni M esiste ν tale che $|z| > M$ per ogni $n > \nu$;

(ii) se $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione definita su un sottoinsieme illimitato A di $\mathbb{C}$, si scrive che

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty,$$

se per ogni M esiste N tale che $|z| > M$ per ogni $z \in A$ tale che $|z| > N$.

Per dare un senso più preciso alla nozione di punto all'infinito per $\mathbb{C}$ accennata alla fine del paragrafo precedente, è utile introdurre la cosiddetta *sfera di Riemann*, che consiste nell'insieme $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dotato di un'opportuna topologia.

Sia $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + t^2 = 1\}$ la sfere unitaria in $\mathbb{R}^3$ ed indichiamo con $\mathcal{N} = (0, 0, 1)$ il suo polo nord. Definiamo la *proiezione stereografica* $\Pi : \mathbb{S}^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ nel modo seguente:

$$\Pi(x, y, t) = \frac{x + iy}{1 - t} \quad \text{se} \quad (x, y, t) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathcal{N}\}, \quad \Pi(\mathcal{N}) = \infty;$$

Π è un'applicazione biunivoca con inversa $\Sigma : \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2$ data da

$$\Sigma(z) = \frac{(2\,\mathrm{Re}(z), 2\,\mathrm{Im}(z), |z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1} \quad \text{se} \quad z \in \mathbb{C}, \quad \Sigma(\infty) = \mathcal{N}.$$

Mediante le applicazioni Π e Σ possiamo definire una topologia in $\widehat{\mathbb{C}}$: gli intorni in $\widehat{\mathbb{C}}$ sono generati dalle immagini mediante Π di intorni in $\mathbb{S}^2$. Per esempio, tipici intorni di ∞ in $\widehat{\mathbb{C}}$ sono gli insiemi $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z > r|\}$, con $r > 0$.

Con questa topologia, la sfera di Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ risulta omeomorfa ad $\mathbb{S}^2$ (tramite gli omeomorfismi Π e Σ) ed è quindi uno spazio topologico connesso e compatto.

Infine, sostituendo al valore assoluto di un un numero reale il modulo di un numero complesso, si possono definire in modo analogo al caso reale i concetti usuali (ed i relativi criteri e teoremi) di convergenza puntuale ed uniforme di successioni di funzioni e di convergenza assoluta (in modulo), uniforme e totale di serie di funzioni a valori complessi.

Sarà inoltre utile in seguito la definizione: sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e siano $f, f_n : A \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, funzioni a valori complessi; si dice che f_n *converge uniformemente ad* f *sui compatti di* A se, per ogni compatto $K \subset A$, f_n converge uniformemente ad f su K.

Si noti che la successione $f_n(z) = z^n$ converge uniformemente alla funzione nulla sui compatti del disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, ma non converge uniformememente su $\mathbb{D}$.

I concetti di raggio ed intervallo di convergenza noti per serie di potenze a coefficienti reali, si estendono senza difficoltà ai concetti di raggio e *disco di* *convergenza* per serie a coefficienti complessi. È inoltre facile dimostrare che ogni serie di potenze converge uniformemente sui compatti del suo disco di convergenza insieme a tutte le serie ottenute derivandola termine a termine una o più volte.

7.1.3. Integrali curvilinei. Un'applicazione continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ si dice una curva C^1 *a tratti* se c'è una partizione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ di $[a,b]$ tale che γ è di classe C^1 su ogni intervallo aperto (t_{j-1}, t_j) con derivata che si estende con continuità a tutto $[t_{j-1}, t_j]$. La curva si dirà *semplice* se γ è iniettiva e *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Infine γ si dirà *regolare a tratti* se è C^1 a tratti e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni t per cui essa è derivabile.

Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto contenente il *sostegno* $\gamma([a,b])$ di una curva C^1 a tratti γ. Ricordiamo che si possono definire su γ due tipi di integrale: *l'integrale di prima specie* di una funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$,

$$\int_\gamma f(z)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt; \tag{7.2}$$

l'integrale di seconda specie di una forma differenziale $X dx + Y dy$ a coefficienti X, Y continui in A,

$$\int_{+\gamma} (X dx + Y dy) = \int_a^b \{X(\alpha(t), \beta(t))\, \alpha'(t) + Y(\alpha(t), \beta(t))\, \beta'(t)\} dt, \tag{7.3}$$

dove si intende $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Se $f \equiv 1$, la (7.2) definisce la *lunghezza di* γ, che indicheremo con $L(\gamma)$. Se impieghiamo in (7.2) e (7.3) un'altra parametrizzazione $[a^*, b^*] \ni \tau \mapsto \gamma^*(\tau)$ dove $\tau = \tau(t)$ e $\tau'(t) > 0$ per ogni t, i numeri definiti in (7.2) e (7.3) non cambiano. Se invece usiamo una parametrizzazione di γ che inverte l'orientazione di γ, [1] allora il valore (7.2) continua a non cambiare, mentre quello di (7.3) cambia segno. Nel seguito, quando non ci saranno ambiguità, rinunceremo al segno + di fronte alla curva γ nell'integrale di seconda specie.

Ricordiamo che una forma differenziale $X dx + Y dy$ con coefficienti reali di classe C^1 in un aperto A di dice *chiusa* in A se $X_y = Y_x$ in A; una forma (con coefficienti continui) si dice *esatta* in A se esiste una $U \in C^1(A)$ tale che $U_x = X$ e $U_y = Y$ in A; si dice che U è una *primitiva* della forma in A.

Per il teorema di Schwarz sulle derivate seconde miste di una funzione, ogni forma esatta (con coefficienti di classe C^1) è chiusa. Il viceversa non è sempre vero; la forma differenziale

$$\frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

[1] Per esempio $[a,b] \ni t \mapsto \gamma(a + b - t)$.

è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ma non è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. È noto però dal corso di Analisi Matematica II che ogni forma differenziale chiusa è localmente esatta, cioè in qualche intorno (per esempio stellato o semplicemente connesso) di ogni punto la forma ammette una primitiva.

La seguente *formula di Gauss-Green*, che viene di solito dimostrata nel corso di Analisi Matematica II, è d'importanza fondamentale.

Teorema 7.1.1 (di Gauss-Green)**.** *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato la cui frontiera ∂A sia l'unione disgiunta di un numero finito di curve semplici chiuse disgiunte e regolari a tratti.*

Sia $X dx + Y dy$ una forma differenziale di classe C^1 su un aperto contenente $\overline{A}$.

Allora

$$\int_{+\partial A} (X dx + Y dy) = \int_A (Y_x - X_y)\, dx dy,$$

dove l'orientazione di $+\partial A$ è quella che si ottiene percorrendo la curva lasciandosi a sinistra l'aperto A.

Sia ora $f = u + iv$ una funzione continua in un aperto A a valori in $\mathbb{C}$; la formula (7.2) si estende allora in modo ovvio (per linearità) a questa f.

Osservaimo ora che formalmente abbiamo che

$$f dz = (u + iv)(dx + idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy);$$

l'espressione $f dz$ risulta quindi una forma differenziale a valori complessi. La formula (7.3) ci permette allora di definire *l'integrale di f lungo la curva* γ come

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt; \tag{7.4}$$

questo non è altro che l'integrale su γ della forma $(udx-vdy)+i(vdx+udy)$.

Esempio 7.1.2. Sia $\Gamma(z_0, r)$ la circonferenza parametrizzata da $[0, 1] \ni t \to z_0 + r\, e^{2\pi i t}$. Allora è facile calcolare che

$$\int_{\Gamma(z_0,r)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

mentre

$$\int_{\Gamma(z_0,r)} \frac{ds}{z - z_0} = 2\pi \int_0^1 e^{-2\pi i t} dt = 0.$$

Da quanto detto prima segue che la differenza importante tra l'integrale di prima specie e quello lungo una curva di una funzione a valori complessi è che, a differenza del primo, l'integrale (7.4) è orientato e cambia segno se la curva è percorsa in senso contrario, cioè

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{+\gamma} f(z)\,dz,$$

dove si intende $-\gamma(t) = +\gamma(a+b-t)$.

Ambedue gli integrali godono delle proprietà usuali di linearità rispetto ad f ed additività rispetto all'unione di curve consecutive.

È utile la seguente maggiorazione.

Proposizione 7.1.3. *Sia $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ una curva C^1 a tratti e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Allora*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \max_{\gamma([a,b])} |f|\, L(\gamma).$$

Dimostrazione. Se l'integrale a primo membro è nullo, la disuguaglianza è ovvia. Altrimenti, possiamo trovare un θ reale tale che $e^{i\theta}\int_\gamma f(z)\,dz$ sia un numero reale positivo. Dunque avremo che

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|e^{i\theta}\int_\gamma f(z)\,dz\right| = e^{i\theta}\int_\gamma f(z)\,dz =$$
$$\int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right] dt \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \le L(\gamma)\max_{\gamma([a,b])}|f|,$$

da una proprietà dell'integrale di Riemann. □

7.2. Funzioni olomorfe

7.2.1. Derivata complessa e olomorfia. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto. Una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ ha *derivata complessa* in $z_0 \in A$ se esiste finito il limite

$$\lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h};$$

in tal caso esso si indica con $f'(z_0)$ e si dice la *derivata* di f in z_0. Se f ha derivata complessa in ogni punto di A, si dice che f è *olomorfa* in A; nel caso in cui $A = \mathbb{C}$, si dice allora che f è *intera*.

Osservazione 7.2.1. (i) Valgono per la derivata complessa e sono facili da dimostrare le proprietà e formule usuali della derivata rispetto alla somma, prodotto, rapporto, composizione ed inversa di funzioni dotate di derivata complessa.

(ii) È facile verificare con queste formule che le funzioni $f(z) = 1, z, z^2, z^3 \ldots$ sono intere e $f'(z_0) = 0, 1, 2z_0, 3z_0^2, \ldots$; la funzione $f(z) = \overline{z}$ non è olomorfa;

infatti, calcoli elementari implicano che

$$\lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{\mathbb{R}\ni h\to 0} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}.$$

In maniera analoga, se f è olomorfa, $\overline{f}$ non può essere olomorfa, a meno che f non sia costante.

Teorema 7.2.2. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione. Se f ha derivata complessa in $z_0 \in A$, allora f è continua in z_0.*

Inoltre, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) f ha derivata complessa in z_0;

(ii) $A \ni (x, y) \mapsto f(x + iy)$ è differenziabile in (x_0, y_0) e $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ con $z_0 = x_0 + iy_0$.

Dimostrazione. Se f ha derivata complessa in $z_0 \in A$ allora f, in un intorno di z_0, si avrà che

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z)\,(z - z_0) \quad \text{dove} \quad \Delta(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{se } \ z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{se } \ z = z_0, \end{cases}$$

e quindi immediatamente $f(z) \to f(z_0)$ per $z \to z_0$.

Se vale (ii), allora esistono due numeri complessi A e B tali che

$$f(z) = f(z_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(|z - z_0|) \quad \text{per} \quad z \to z_0.$$

Ciò implica che esistono le derivate parziali $f_x(z_0)$ e $f_y(z_0)$ ed eguagliano A e B, rispettivamente. Ricordando le relazioni tra un numero complesso ed il suo coniugato con le loro parti reali ed immaginarie, possiamo scrivere allora che

$$\begin{aligned} f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|) = \\ f(z_0) + \frac{1}{2}[f_x(z_0) - if_y(z_0)](z - z_0) + \\ \frac{1}{2}[f_x(z_0) + if_y(z_0)]\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|) \end{aligned}$$

e quindi

$$f(z) = f(z_0) + f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|), \tag{7.5}$$

dove si è posto

$$f_z(z_0) = \frac{1}{2}[f_x(z_0) - if_y(z_0)], \quad f_{\overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}[f_x(z_0) + if_y(z_0)].$$

Perciò, se $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, allora è chiaro che f ha derivata complessa $f'(z_0) = f_z(z_0)$.

Se vale (i), allora la funzione $\Delta(z)$ sopra definita è continua in z_0 e in un intorno di z_0 si ha che

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + [\Delta(z) - f'(z_0)](z - z_0);$$

da questa segue che f è differenziabile in z_0 e, da (7.5), che $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$.□

Gli operatori differenziali

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

si dicono le *derivate di Wirtinger*.

L'equazione differenziale

$$f_{\overline{z}} = 0 \tag{7.6}$$

si dice *equazione di Cauchy-Riemann* e viene soddisfatta dalle funzioni olomorfe su un aperto. Se poniamo $f = u + iv$, con u e v funzioni a valori reali, allora essa è equivalente al *sistema di Cauchy-Riemann*:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{7.7}$$

Corollario 7.2.3. *Una funzione di classe C^1 in un aperto $A \subset \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se soddisfa* (7.6) *o* (7.7) *in A .*

Corollario 7.2.4. *Sia f olomorfa in un aperto connesso $A \subset \mathbb{C}$. Se $f'(z) = 0$ per ogni $z \in A$, allora f è costante su A.*

Dimostrazione. Infatti f è differenziabile ed ha differenziale nullo in A. □

7.3. La formula di Cauchy

7.3.1. Il teorema integrale e la formula di Cauchy. Una semplice conseguenza del Teorema 7.1.1 di Gauss-Green è il seguente risultato.

Teorema 7.3.1. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato la cui frontiera ∂A sia l'unione disgiunta di un numero finito di curve semplici chiuse disgiunte e regolari a tratti e sia f una funzione a valori complessi di classe $C^1(\overline{A})$.*

Allora

$$\int_{+\partial A} f(z)\, dz = 2i \int_A f_{\overline{z}}(z)\, dxdy. \tag{7.8}$$

L'orientazione di $+\partial A$ è quella che si ottiene percorrendo la curva lasciandosi a sinistra l'aperto A.

Dimostrazione. Infatti si ha che

$$\int_{\partial A} f(z)\,dz = \int_{\partial A} (udx - vdy) + i(vdx + udy) =$$
$$\int_A [-(v_x + u_y) + i(u_x - v_y)]\,dxdy = 2i \int_A f_{\overline{z}}(z)\,dxdy,$$

avendo applicato il Teorema 7.1.1 di Gauss-Green nel secondo passaggio. □

Corollario 7.3.2 (Teorema integrale di Cauchy)**.** *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto che soddisfa le ipotesi del Teorema 7.3.1 e sia f una funzione a valori complessi di classe $C^1(\overline{A})$.*

Se f è olomorfa in A, allora

$$\int_{\partial A} f(z)\,dz = 0.$$

Il seguente teorema è cruciale nella teoria delle funzioni olomorfe.

Teorema 7.3.3 (Formula di Cauchy)**.** *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato la cui frontiera ∂A sia l'unione disgiunta di un numero finito di curve semplici chiuse disgiunte e regolari a tratti.*

Sia $f \in C^1(\overline{A})$ una funzione olomorfa in A. Allora risulta che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \ \ z \in A, \tag{7.9}$$

con la solita orientazione di $+\partial A$.

Dimostrazione. Fissiamo $z \in A$; esiste un disco $\mathbb{D}_\varepsilon$ di raggio ε e con centro in z la cui chiusura è contenuta in A; poniamo allora $A_\varepsilon = A \setminus \overline{\mathbb{D}_\varepsilon}$. Poiché ls funzione definita da

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad \text{per} \quad \zeta \in A_\varepsilon,$$

è olomorfa e di classe $C^1(\overline{A_\varepsilon})$, il Corollario 7.3.2 implica che

$$0 = \int_{+\partial A_\varepsilon} g(\zeta)\,d\zeta = \int_{+\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \int_{+\partial \mathbb{D}_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{7.10}$$

Risulta ora che

$$\int_{+\partial \mathbb{D}_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\theta})}{z + \varepsilon e^{i\theta} - z}\,(i\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta})\,d\theta.$$

Dato che la (7.10) vale per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, abbiamo dunque che

$$\int_{+\partial A_\varepsilon} g(\zeta)\,d\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0^+} i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = 2\pi i\, f(z).$$

L'ultimo passaggio segue dalla uniforme continuità di f sui compatti contenuti in A. $\square$

Corollario 7.3.4. *Se $f \in C^1(\overline{A})$ è olomorfa in A, allora $f \in C^\infty(A)$ e risulta che*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta, \ \ z \in A, \tag{7.11}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Per $n = 0$ la formula (7.11) coincide con (7.9), già dimostrata.

Fissiamo $z \in A$ ed indichiamo con m in minimo di $|\zeta - z|$ al variare di ζ su ∂A; prendiamo inoltre h tale che $|h| \le m/2$ ed in modo che $z + h \in A$. Si ha che

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right) - \frac{1}{(\zeta - z)^2} = \frac{h}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - h)},$$

e quindi

$$\left| \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right) - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right| \le \frac{2\,|h|}{m^3}.$$

Perciò otteniamo che

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \right| \le \frac{2\,|h|}{m^3} \, L(\partial A) \, \max_{\partial A} |f|,$$

per la Proposizione 7.1.3. Da questa disuguaglianza segue che $f'(z)$ esiste e vale la formula (7.11) con $n = 1$; tale formula implica che $f'(z)$ è continua.

La tesi segue allora ragionando per induzione su n. $\square$

7.3.2. Teoremi di estensione. Le ipotesi del Teorema 7.3.3 possono essere leggermente indebolite per ottenere il seguente risultato.

Teorema 7.3.5 (di estensione di Riemann)**.** *Sia A un aperto, $z_0 \in A$ ed f una funzione olomorfa di classe $C^1(A \setminus \{z_0\})$.*

Se f è limitata in un intorno di z_0, allora f si può estendere ad una funzione olomorfa $f^* : A \to \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Esistono due numeri positivi r ed M tali che il disco chiuso $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$ è contenuto in A e $|f| \le M$ su $\overline{\mathbb{D}}$. Fissato $z \in \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$, per ogni ε tale che $0 < \varepsilon < |z - z_0|$, si ponga $\mathbb{D}_\varepsilon = \mathbb{D}(z_0, \varepsilon)$ e $A_\varepsilon = \mathbb{D}(z_0, r) \setminus \overline{\mathbb{D}(z_0, \varepsilon)}$. Il Teorema 7.3.3 ci dice che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial A_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial \mathbb{D}_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Il secondo integrale tende a zero quando $\varepsilon \to 0$, dato che $|f| \leq M$ e $|\zeta - z| \geq |z| - \varepsilon$ se $\zeta \in \mathbb{D}_\varepsilon$. Possiamo quindi concludere che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

per ogni $z \in \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$. Inoltre, dato che

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|},$$

calcoliamo che

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta.$$

Infine, ponendo $f^*(z) = f(z)$ per $z \in A \setminus \{z_0\}$ e $f^*(z_0)$ uguale a quest'ultimo integrale e ripetendo la dimostrazione del Corollario 7.3.4 con $\partial A = \partial\mathbb{D}$ e $z = z_0$, possiamo scrivere che

$$\left| \frac{f^*(z_0 + h) - f^*(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta \right| \leq \frac{2\,|h|}{m^3}\, L(\partial\mathbb{D})\, M,$$

da cui segue che f^* ammette derivata complessa in z_0 e quindi estende olomorficamente f in z_0. □

In questo caso, z_0 si dice una *singolarità rimuovibile.*

Enunciamo senza dimostrazione il seguente *Principio di Riflessione di Schwarz.*

Teorema 7.3.6. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto simmetrico rispetto all'asse reale, ossia tale che se $z \in A$ anche $\bar{z} \in A$.*

Sia f una funzione continua in $\{z \in A : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, olomorfa al suo interno ed a valori reali su $\{z \in A : \mathrm{Im}(z) = 0\}$.

Allora la funzione $\tilde{f} : A \to \mathbb{C}$ definita da

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } \mathrm{Im}(z) \geq 0, \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{se } \mathrm{Im}(z) \leq 0, \end{cases}$$

è olomorfa in A.

7.4. Il teorema di Goursat

Nel Corollario 7.3.2 si può rimuovere l'ipotesi di regolarità $C^1(A)$ di f, limitandosi a richiedere che f sia continua ed olomorfa in A. Dimostreremo infatti che ogni funzione continua ed olomorfa in A è di classe $C^1(A)$. In questo paragrafo vedremo come si procede.

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Una *primitiva olomorfa* di f è una funzione olomorfa $F : A \to \mathbb{C}$ tale che $F' = f$. Si dice che f *ammette primitive olomorfe locali* in A, se per ogni $z_0 \in A$ esiste un intorno di z_0

su cui esiste una primitiva olomorfa della restrizione di f a quell'intorno. È chiaro che se A è connesso, due primitive olomorfe di una stessa funzione differiscono per una costante.

La seguente proposizione è una riscrittura in termini di funzioni a valori complessi di analoghi risultati noti per le forme differenziali reali. Per completezza diamo la dimostrazione nel caso complesso.

Proposizione 7.4.1. *Sia $f : A \to \mathbb{C}$ di classe C^1. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $f(z)$ è olomorfa;

(ii) la forma $f(z)\,dz$ è chiusa;

(iii) la forma $f(z)\,dz$ è localmente esatta;

(iv) $f(z)$ ammette primitive olomorfe locali.

Dimostrazione. È chiaro che $f(z)$ è olomorfa se e solo se$f_{\overline{z}} = 0 = 0_z$ e cioè se e solo se la forma $f\,dz$ è chiusa.

Sia $f\,dz$ chiusa in A e sia $\overline{\mathbb{D}} \subset A$ un disco con centro in z_0. Per $z \in \mathbb{D}$, sia $+\gamma(z_0, z)$ il segmento orientato che unisce z_0 a z e si consideri la funzione

$$F(z) = \int_{+\gamma(z_0,z)} f(z)\,dz = \int_0^1 f(z_0 + t\,(z - z_0))\,(z - z_0)\,dt, \;\; z \in \mathbb{D}.$$

Derivando sotto il segno di integrale si ha che

$$F_{\overline{z}}(z) = \int_0^1 \frac{d}{d\overline{z}}\,[f(z_0 + t\,(z - z_0))\,(z - z_0)]\,dt = 0,$$

dato che $f_{\overline{z}} = 0$ e

$$\begin{aligned} F'(z) = F_z(z) = \int_0^1 \frac{d}{dz}\,[f(z_0 + t\,(z - z_0))\,(z - z_0)]\,dt = \\ \int_0^1 f'(z_0 + t\,(z - z_0))\,t(z - z_0)\,dt + \int_0^1 f(z_0 + t\,(z - z_0))\,dt = \\ \int_0^1 t\,\frac{d}{dt} f(z_0 + t\,(z - z_0))\,dt + \int_0^1 f(z_0 + t\,(z - z_0))\,dt = \\ \Big[t\,f(z_0 + t\,(z - z_0))\Big]_0^1 = f(z), \end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti. Perciò $dF = f\,dz$ in $\mathbb{D}$ e cio $f\,dz$ è localmente esatta. Il viceversa è banale.

Infine, (iii) e (iv) sono sinonimi. □

Il seguente risultato ci fornisce una condizione necessaria e sufficiente perché una funzione continua abbia primitiva olomorfa.

Teorema 7.4.2. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua.*

(i) Se f ha una primitiva olomorfa F e $\gamma : [0,1] \to A$ è una curva C^1 a tratti con estremi $z_0 = \gamma(0)$ e $z_1 = \gamma(1)$, allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0),$$

ed in particolare, se γ è chiusa, risulta che

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{7.12}$$

(ii) Se A è connesso e vale (7.12) per ogni curva chiusa C^1 a tratti γ con sostegno in A, allora f ha una primitiva olomorfa in A.

Dimostrazione. (i) Basta calcolare:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt =$$
$$\int_0^1 \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt = F(\gamma(0)) - F(\gamma(1)) = F(z_1) - F(z_0).$$

La (7.12) segue senz'altro.

(ii) Fissiamo z_0 e z in A, sia γ_z una curva C^1 a tratti tale che $\gamma_z(0) = z_0$ e $\gamma_z(1) = z$ e definiamo $F : A \to \mathbb{C}$ con la formula

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta,\ \ z \in A.$$

L'ipotesi (7.12) su f fa sì che il valore $F(z)$ non dipenda dalla particolare curva scelta.

Fissato $w \in A$, possiamo scegliere z abbastanza vicino a w in modo che il segmento che li unisce stia ancora in A. Possiamo allora considerare la curva chiusa $+\Gamma = +\gamma_w \cup (+\sigma) \cup (-\gamma_z)$, dove $+\sigma$ è il segmento orientato parametrizzato da $[0,1] \ni t \mapsto w + t(z-w)$ per ottenere

$$0 = \int_{+\Gamma} f(\zeta)\,d\zeta =$$
$$\int_{+\gamma_w} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{+\sigma} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{-\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta =$$
$$F(w) + \int_{+\sigma} f(\zeta)\,d\zeta - F(z).$$

Possiamo perciò scrivere che

$$F(z) - F(w) = \int_{+\sigma} f(\zeta)\,d\zeta = (z-w)\int_0^1 f(w + t(z-w))\,dt.$$

Dunque otteniamo che

$$\left|\frac{F(z)-F(w)}{z-w}-f(w)\right| = \left|\int_0^1 f(w+t(z-w))\,dt - f(w)\right| =$$
$$\left|\int_0^1 [f(w+t(z-w))-f(w)]\,dt\right| \leq \int_0^1 |f(w+t(z-w))-f(w)|\,dt.$$

Se $z \to w$ l'ultimo integrando converge a zero uniformemente rispetto a $t \in [0,1]$ e quindi abbiamo dimostrato che

$$\lim_{z\to w}\frac{F(z)-F(w)}{z-w} = f(w),$$

ossia che $F'(w) = f(w)$. La conclusione segue dall'arbitrarietà di w in A. $\square$

Esempio 7.4.3. La funzione $f(z) = z^n$ ha primitive olomorfe $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c$ con $c \in \mathbb{C}$ su tutto $\mathbb{C}$ per $n \geq 0$ e su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ se $n \leq -2$.

Se $n = 1$, l'Esempio 7.1.2 e la parte (i) del Teorema 7.4.2 mostrano che $f(z) = 1/z$ non ha primitiva su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Nel caso di aperti convessi, la parte (ii) del Teorema 7.4.2 è valida anche se ci limitiamo a considerare le sole curve triangolari.

Proposizione 7.4.4. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua tale che, per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulti che*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Allora f ha una primitiva olomorfa su A.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in A$; dato che A è convesso, per ogni $z \in A$ il segmento che unisce z_0 a z è contenuto in A e può quindi essere scelto, nella dimostrazione della parte (ii) del Teorema 7.4.2, come curva γ_z.

A questo punto si può ripetere la dimostrazione del Teorema 7.4.2, osservando che il segmento congiungente z a w ed i segmenti γ_z e γ_w formano un triangolo. $\square$

Conseguenza immediata della proposizione appena dimostrata è la seguente estensione parziale della Proposizione 7.4.1. Infatti ogni punto in A è contenuto in un disco contenuto in A.

Corollario 7.4.5. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{C}$ continua. Se per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulta che $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni.*

(i) $f(z)$ ammette primitive olomorfe locali;

(ii) la forma differenziale $f(z)\,dz$ è localmente esatta.

Il seguente importante risultato è il primo passo per completare l'estensione della Proposizione 7.4.1.

Teorema 7.4.6 (Teorema di Goursat)**.** *Sia $\Delta \subset \mathbb{C}$ un triangolo chiuso e sia f una funzione olomorfa in un aperto A che contiene Δ. Allora:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Dimostrazione. Orientiamo in senso anti-orario $\partial\Delta$ e consideriamo per ciascun lato il suo punto medio. Congiungendo tali punti medi tra loro si divide Δ in quattro triangoli chiusi Δ_1^k, $k = 1, 2, 3, 4$, simili a Δ con un fattore di similitudine di $1/2$.

Orientiamo i contorni di questi 4 triangoli ancora in senso anti-orario. Risulta allora che

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^k} f(z)\,dz;$$

infatti ogni lato (aperto) contenuto in Δ del triangolo Δ_1^k è percorso due volte, ma con orientazione opposta, mentre i restanti lati formano $\partial\Delta$ con orientazione coerente. Perciò otteniamo la disuguaglianza:

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_1^k} f(z)\,dz\right| \le 4 \max_{1\le k\le 4} \left|\int_{\partial\Delta_1^k} f(z)\,dz\right|.$$

Sia Δ_1 il triangolo fra i Δ_1^k per il quale il massimo a secondo membro sia raggiunto: si avrà che

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4 \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|.$$

Lo stesso argomento usato per Δ si può ripetere per Δ_1 e di nuovo iterare. Otterremo quindi una successione decrescente di triangoli,

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \cdots,$$

tali che

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \quad \text{e} \quad L(\partial\Delta_n) = 2^{-n} L(\partial\Delta) \tag{7.13}$$

per ogni $n = 0, 1, \dots$; inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}\mathrm{diam}(\Delta) = 0.$$

Pertanto, per il Teorema di Cantor, esiste $z_0 \in \Delta$ tale che

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \{z_0\}.$$

Poiché f è olomorfa, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

e quindi tale che

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon\, |z - z_0|,$$

se $|z - z_0| < \delta$. Preso $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande in modo che $\operatorname{diam}(\Delta_n) < \delta$, dato che la funzione $z \to f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ha chiaramente primitiva olomorfa su $\mathbb{C}$, il suo integrale su $\partial\Delta_n$ è nullo e quindi

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\, dz \right| <$$
$$\varepsilon \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0|\, ds \leq \varepsilon \operatorname{diam}(\Delta_n)\, L(\partial\Delta_n) =$$
$$4^{-n} \varepsilon \operatorname{diam}(\Delta)\, L(\partial\Delta).$$

Da quest'ultima disuguaglianza e da (7.13) concludiamo pertanto che

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \right| \leq 4^n 4^{-n} \varepsilon \operatorname{diam}(\Delta)\, L(\partial\Delta) = \varepsilon \operatorname{diam}(\Delta)\, L(\partial\Delta);$$

la tesi segue quindi dall'arbitrarietà di ε. □

Per le applicazioni è utile il seguente corollario.

Corollario 7.4.7. *Sia $\Delta \subset \mathbb{C}$ un triangolo chiuso, $z_0 \in \Delta$ e sia f una funzione continua su un aperto A contenente Δ ed olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$.*

Allora

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Dimostrazione. (i) Se z_0 è un vertice di Δ, prendiamo due punti arbitrari a e b interni ai due lati con un estremo in z_0 e dividiamo Δ in tre triangoli Δ_1, Δ_2 e Δ_3; per fissare le idee sia Δ_1 il triangolo formato da a, b e z_0 e sia Δ_2 quello formato da a, b ed uno dei due restanti vertici.

Per il Teorema 7.4.6, avremo che

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \right| =$$
$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\, dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)\, dz \right| =$$
$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz \right| \leq \max_{\partial\Delta_1} |f|\, L(\partial\Delta_1).$$

La tesi segue allora dal fatto che $L(\partial\Delta_1) \to 0$ quando a e $b \to z_0$.

(ii) Se z_0 è interno ad uno dei lati, possiamo dividere Δ in due triangoli mediante il segmento che unisce z_0 al vertice opposto; questi due triangoli hanno un loro vertice in z_0 e quindi basta usare l'additività dell'integrale ed il caso (i) per concludere.

(iii) Se z_0 è interno a Δ, si unisce z_0 a ciascuno dei tre vertici e si ottengono così tre triangoli con un vertice in z_0. Si conclude di nuovo applicando l'additività dell'integrale ed il caso (i). □

Teorema 7.4.8. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto convesso e $z_0 \in A$. Se $f : A \to \mathbb{C}$ è una funzione continua su A ed olomorfa su $A \setminus \{z_0\}$, allora*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

per ogni curva chiusa e C^1 a tratti $\gamma : [a, b] \to A$.

Dimostrazione. Per il Corollario 7.4.7, per ogni triangolo $\Delta \subset A$ risulta che

$$\int_{+\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Per la Proposizione 7.4.4, f ammette primitiva olomorfa in A. La conclusione segue quindi dal Teorema 7.4.2. □

Osservazione 7.4.9. Come sappiamo la funzione $1/z$ non ha primitive olomorfe su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; il teorema precedente garantisce però che essa ammette primitive olomorfe locali (in ogni aperto convesso contenuto in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

7.4.1. La formula di Cauchy per il disco. Il Teorema 7.4.8 ci permette di dimostrare la formula integrale di Cauchy per il disco.

Teorema 7.4.10. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Sia $\mathbb{D}$ un disco con centro z_0 e raggio $r > 0$ e con chiusura contenuta in A.*

Per ogni $z \in \mathbb{D}$ si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{7.14}$$

Dimostrazione. Dato che $\overline{\mathbb{D}} \subset A$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che il disco $\mathbb{D}_\varepsilon$ con centro in z_0 e raggio $r + \varepsilon$ è ancora contenuto in A; per $\zeta \in \mathbb{D}_\varepsilon$ definiamo:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{se } \zeta \neq z, \\ f'(\zeta) & \text{se } \zeta = z. \end{cases}$$

Allora g è continua su $\mathbb{D}_\varepsilon$ e olomorfa su $\mathbb{D}_\varepsilon \setminus \{z\}$. Quindi, per il Teorema 7.4.8, abbiamo:

$$0 = \int_{\partial\mathbb{D}} g(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z) \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Per concludere la dimostrazione, si ponga:

$$h(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \ z \in \mathbb{D};$$

abbiamo già calcolato nell'Esempio 7.1.2 che $h(z_0) = 2\pi i$. Derivando sotto il segno di integrale rispetto a z otteniamo inoltre che

$$h'(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Si osservi ora che la funzione $\zeta \mapsto (\zeta - z)^{-2}$ ha primitiva olomorfa $(z-\zeta)^{-1}$ in un intorno aperto di $\partial\mathbb{D}$; il suo integrale su $\partial\mathbb{D}$ è quindi nullo e cioè $h'(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Essendo $\mathbb{D}$ connesso, otteniamo che h è costante e quindi eguaglia $2\pi i$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Era ciò che ci restava da dimostrare. □

Il seguente risultato si ottiene facilmente derivando ripetutamente sotto il segno di integrale in (7.14).

Teorema 7.4.11. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*

Allora $f \in C^\infty(A)$, tutte le sue derivate $f^{(n)}$, $n \geq 1$, sono funzioni olomorfe e, se $\overline{\mathbb{D}} \subset A$, risulta che

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \ z \in \mathbb{D}, \ n \geq 0. \tag{7.15}$$

La Proposizione 7.4.1 è ora estendibile a tutte le funzioni continue su un aperto A in $\mathbb{C}$.

Teorema 7.4.12. *Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $f(z)$ è olomorfa;
(ii) per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulta che $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$;
(iii) la forma $f(z)\, dz$ è localmente esatta;
(iv) $f(z)$ ammette primitive olomorfe locali in A.

Dimostrazione. Abbiamo che (ii) segue da (i) per il Teorema 7.4.6 di Goursat. Per il Corollario 7.4.5 la (ii) implica la (iii) e la (iv). Infine, se vale (iv), in un intorno di ogni punto f è la derivata di una funzione olomorfa e quindi olomorfa per il Teorema 7.4.11. □

En passant abbiamo dimostrato il seguente teorema di Morera.

Corollario 7.4.13 (Teorema di Morera)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Se per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$ risulta che $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$, allora $f(z)$ è olomorfa in A.*

Concludiamo il paragrafo con un'altra dimostrazione del *Teorema di Estensione di Riemann.*

Teorema 7.4.14 (di estensione di Riemann)**.** *Sia A un aperto, $z_0 \in A$ ed f una funzione olomorfa in $A \setminus \{z_0\}$.*

Se f è limitata in un intorno di z_0, allora f si può estendere ad una funzione olomorfa $f^* : A \to \mathbb{C}$.

Dimostrazione. La funzione $g : A \to \mathbb{C}$ definita da

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{se } z \neq z_0, \\ 0 & \text{se } z = z_0, \end{cases}$$

è continua in A e olomorfa fuori di z_0 e quindi è olomorfa in A e quindi ammette primitiva olomorfa localmente, per quanto asserito nella dimostrazione del Teorema 7.4.8. La funzione $f^* : A \to \mathbb{C}$ definita da

$$f^*(z) = \begin{cases} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} & \text{se } z \neq z_0, \\ g'(z_0) & \text{se } z = z_0, \end{cases}$$

allora è continua su A ed olomorfa fuori di z_0 e quindi è olomorfa su A. Infine $f^* \equiv f$ fuori di z_0. □

7.5. Funzioni analitiche

7.5.1. Polinomi e funzioni analitiche. Un esempio di funzioni olomorfe sono i polinomi

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k,$$

con $a_k \in \mathbb{C}$. È noto dal Teorema Fondamentale dell'Algebra (di cui sarà data più tardi una ulteriore dimostrazione) che, dette $z_1, \ldots, z_J$ le radici complesse dell'equazione $p_n(z) = 0$, contate secondo le loro rispettive molteplicità $\mu_1, \ldots, \mu_J$, sussiste la fattorizzazione:

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)^{\mu_1} \cdots (z - z_J)^{\mu_J} \quad \text{con} \quad \mu_1 + \cdots + \mu_J = n.$$

Un esempio più generale di funzioni olomorfe sono le serie di potenze convergenti:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (z - z_0)^n;$$

infatti esse sono derivabili termine a termine sui compatti contenuti nel loro disco di convergenza e quindi ammettono derivata complessa in ogni punto

z del disco di convergenza e questa è uguale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z - z_0)^{n-1}.$$

Sia ora $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed indichiamo con $\mathbb{D}(z_0, r)$ il disco con centro z_0 e raggio r; una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ si dice *analitica* se per ogni $z_0 \in A$ esiste $r > 0$ tale che $\overline{\mathbb{D}(z_0, r)} \subset A$ ed f è uguale su $\mathbb{D}(z_0, r)$ alla somma di una serie di potenze centrata in z_0. Dalla teoria delle serie, è chiaro che tutte le derivate di una funzione analitica sono analitiche. Inoltre, da quanto qui sopra osservato le funzioni analitiche (e le loro derivate) sono olomorfe.

7.5.2. Caratterizzazione delle funzioni analitiche. In effetti, funzioni olomorfe e funzioni analitiche formano la stessa classe di funzioni, come dimostra il seguente risultato.

Teorema 7.5.1. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*

Se $\mathbb{D}$ è un disco di raggio $r > 0$ centrato in $z_0 \in A$ e con chiusura contenuta in A, allora risulta che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \textit{dove} \tag{7.16}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

ed il raggio di convergenza della serie è maggiore o uguale ad r.

Dimostrazione. Siano $z \in \mathbb{D}$ e $\zeta \in \partial \mathbb{D}$; allora $|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$ e si ha che il seguente sviluppo in serie vale uniformemente per $\zeta \in \partial \mathbb{D}$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Per la formula (7.14) abbiamo allora che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right] (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

È palese inoltre che $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$. Infine, dato che per ogni $n \geq 0$ la Proposizione 7.1.3 implica che

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \right| \leq \frac{L(\partial \mathbb{D})}{2\pi\, r^{n+1}}\, \max_{\partial \mathbb{D}} |f| = r^{-n}\, \max_{\partial \mathbb{D}} |f|,$$

la serie di potenze converge per ogni z tale che $|z - z_0| < r$ e quindi il suo raggio di convergenza non può essere inferiore ad r. □

7.5.3. Zeri di funzioni olomorfe. Il fatto che le funzioni olomorfe siano analitiche ha importanti conseguenze riguardo ai loro zeri. Diremo che una funzione olomorfa su un aperto A ha uno *zero* di *molteplicità* $\mu \in \mathbb{N}$ in $z_0 \in A$ se

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(\mu-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(\mu)}(z_0) \neq 0.$$

Diremo inoltre che f ha uno zero di *molteplicità infinita* in $z_0 \in A$ se ogni sua derivata è nulla in z_0.

Teorema 7.5.2. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $z_0 \in A$. Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione analitica non identicamente nulla.*

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) z_0 è uno zero di molteplicità $\mu \geq 1$;

(ii) se $f(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ in un disco $\mathbb{D} \subset A$ con centro in z_0, allora $c_\mu \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{D}$;

(iii) esiste una funzione olomorfa $g : A \to \mathbb{C}$ con $g(z_0) \neq 0$ tale che $f(z) = (z - z_0)^\mu g(z)$ per ogni $z \in A$.

Dimostrazione. La (ii) segue dalla (i) per il Teorema 7.5.1, dato che $c_0 = c_1 = \cdots = c_{\mu-1} = 0$ e $c_\mu \neq 0$ per ipotesi.

Se vale (ii), la funzione $g : A \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^\mu} & \text{per} \quad z \neq z_0, \\ c_\mu & \text{per} \quad z = z_0, \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema 7.4.14 e quindi è (estendibile ad una funzione) olomorfa in A; è chiaro che $g(z_0) \neq 0$.

Se vale (iii), la formula (7.16) ci informa che

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} (\zeta - z_0)^{\mu-n-1} g(\zeta)\, d\zeta;$$

se $0 \leq n \leq \mu - 1$, otteniamo allora che $f^{(n)}(z_0) = 0$, perché la funzione integranda è olomorfa; se $n = \mu$ la formula di Cauchy implica invece che $f^{(\mu)}(z_0) = \mu!\, g(z_0) \neq 0$. □

Teorema 7.5.3. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso ed f una funzione olomorfa in A. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) f è identicamente nulla su A;

(ii) l'insieme degli zeri di f in A ha un punto di accumulazione in A;

(iii) f ha uno zero di molteplicità infinita in A.

Dimostrazione. È chiaro che (i) implica (ii) senz'altro.

Se vale (ii), esistono un punto $z_0 \in A$ ed una successione di zeri $z_n \neq z_0$ di f che converge a z_0. È chiaro che $f(z_0) = 0$ per continuità. Se z_0 avesse molteplicità finita μ, allora per il Teorema 7.5.2 potremmo scrivere che $f(z) = (z - z_0)^\mu g(z)$ con g olomorfa e $g(z_0) \neq 0$. Avremmo dunque $0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^\mu g(z_n)$ e quindi $g(z_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $n \to \infty$, ne seguirebbe che $g(z_0) = 0$, e questo è assurdo.

Se infine vale (iii), sia z_0 uno zero di molteplicità infinita e sia

$$M = \{w \in A : f^{(n)}(w) = 0 \ \text{ per ogni } \ n \geq 0\}.$$

È chiaro che M è non vuoto perché $z_0 \in M$; M è chiuso, perché intersezione di chiusi. Infine, M è anche aperto, perché per ogni $w \in M$ esiste un disco aperto $\mathbb{D} \subset A$ centrato in w sul quale vale lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (z - w)^n;$$

quindi $f \equiv 0$ su $\mathbb{D}$, dalla definizione di M, ossia $\mathbb{D} \subset M$.

Essendo A connesso, deve essere $M = A$, cioè $f \equiv 0$. □

Corollario 7.5.4. *Gli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla in un aperto sono isolati ed hanno molteplicità finita.*

7.5.4. Funzioni olomorfe notevoli. Abbiamo dimostrato che la classe delle funzioni olomorfe in un aperto coincide con quella delle funzioni analitiche. In questo paragrafo presentiamo alcuni esempi notevoli.

Le funzioni esponenziale, seno e coseno. La serie

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ha raggio di convergenza $R = \infty$ e quindi definisce una funzione intera, la funzione *esponenziale*. Si ha inoltre che

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Da ciò segue che la funzione $f(z) = e^{-z} e^{z+w}$ ha derivata nulla per ogni $w \in \mathbb{C}$ e quindi che

$$f(z) = f(0) = e^w \quad \text{ e } \quad e^{-z} e^z = e^{-z} e^{z+0} = e^0 = 1.$$

Perciò e^{-z} è il reciproco di e^z e vale che

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Le serie

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{e} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

definiscono ugualmente due funzioni intere: rispettivamente, le funzioni *coseno* e *seno*. Inoltre, sommando le serie termine a termine, con qualche manipolazione otteniamo facilmente la *formula di Eulero*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{7.17}$$

Le identità

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

e

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{7.18}$$

seguono facilmente dalle definizioni e da (7.17). Inoltre, seguono facilmente le formule

$$(\cos z)' = -\sin z \quad \text{e} \quad (\sin z)' = \cos z,$$

dalle quali segue l'identità *fondamentale*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

osservando che il suo primo membro ha derivata nulla. Le formule di *addizione*,

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,$$
$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,$$

seguono invece da (7.18) e dalla formula di addizione per la funzione esponenziale.

Infine, osservando che per $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

si deducono facilmente le formule

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{e} \quad \arg e^z = \mathrm{Im}(z),$$

la 2π-periodicità di $e^{iz}, \cos z$ e $\sin z$ ed i loro zeri.

La funzione logaritmo. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso. Una funzione $f \in C^0(\Omega)$ si dice un *logaritmo* in Ω se si ha che

$$e^{f(z)} = z \ \text{ per ogni } \ z \in \Omega.$$

Dato che $e^{f(z)} \neq 0$, è necessario che $0 \notin \Omega$.

Si noti che se f è un logaritmo, anche $f + 2\pi ik$ lo è per ogni $k \in \mathbb{Z}$, dato che

$$e^{f(z)+2\pi ik} = e^{f(z)} e^{2\pi ik} = e^{f(z)} = z.$$

Viceversa, se f e g sono due logaritmi, allora

$$e^{f(z)-g(z)} = \frac{e^{f(z)}}{e^{g(z)}} = \frac{z}{z} = 1,$$

per ogni $z \in \Omega$ e quindi $[f(z) - g(z)]/2\pi i$ è una funzione a valori interi. Essendo $(f - g)/2\pi i$ continua sul connesso Ω, allora essa è una costante (intera). In conclusione, *due logaritmi in un aperto connesso* Ω *differiscono per una costante* $2\pi ik$ *per qualche* $k \in \mathbb{Z}$.

Vista la non unicità dei logaritmi, è conveniente definire l'*argomento principale* $\operatorname{Arg} z$ di $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ come l'unico numero $\theta \in (-\pi.\pi]$ tale che $z = |z|\, e^{i\theta}$; Arg è una funzione discontinua su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, visto che presenta un salto di 2π in corrispondenza della semi-retta $(-\infty, 0)$ dei numeri reali negativi. Al di fuori di $(-\infty, 0]$, Arg è di classe C^∞.

Se indichiamo con $\log r$ il logaritmo di un numero positivo r, allora la funzione

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$$

è un logaritmo, dato che $e^{\operatorname{Log} z} = e^{\log|z|} e^{i \operatorname{Arg} z} = |z|\, e^{i \operatorname{Arg} z} = z$, definito in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; ci riferiremo a Log come al *logaritmo principale* di z.

In modo analogo possiamo definire un logaritmo sul complemento di ogni semi-retta uscente dall'origine: basta per ciò definire l'argomento in modo che assuma valori compresi tra due angoli $\alpha - 2\pi$ e α, dove α è l'angolo formato tra la semi-retta ed il semi-asse reale positivo.

Proposizione 7.5.5. *Sia* $f \in C^0(\Omega)$ *un logaritmo definito su un aperto connesso* $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Allora f *è una funzione olomorfa in* Ω *con derivata* $f'(z) = 1/z$. *Inoltre, fissato* $z_0 \in \Omega \setminus (-\infty, 0]$, *esiste un intero* k *tale che*

$$f(z) = \operatorname{Log} z_0 + \int_\gamma \frac{dz}{z} + 2\pi ik,$$

dove γ *è una qualunque curva* C^1 *a tratti con primo estremo in* z_0 *e secondo in* z.

Dimostrazione. La funzione f è per definizione biiettiva da Ω a $f(\Omega)$ con inversa la funzione esponenziale. Per $z, z+h \in \Omega$ con $z \neq 0$, posto $w = f(z)$ e $w + k = f(z + h)$, si ha che

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{e^{w+k} - e^w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Dato che f è una primitiva olomorfa di $1/z$, si ha allora che

$$f(z) = f(z_0) + \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Basta allora osservare che esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $f(z_0) = \operatorname{Log} z_0 + 2\pi i k$. $\square$

Potenza con esponente complesso. Una volta definito il logaritmo, possiamo definire le potenze con esponente complesso arbitrario esattamente come si faceva a definire quelle con esponente reale.

Siano $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{C}$. Se $\log a$ è un qualsiasi valore del logaritmo di a, definiamo un valore della *potenza b-esima di z* come il numero complesso

$$a^b = e^{b \log a}.$$

Dato che $\log a$ è determinato a meno di multipli interi di $2\pi i$, a^b è determinato a meno di un fattore uguale a $e^{2\pi i k b}$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Osserviamo che se $b \in \mathbb{Z}$, allora a^b ha comunque un solo valore, che non è altro che il numero complesso

$$\underbrace{a\,a \cdots a}_{b \text{ volte}}.$$

Se $b \in \mathbb{Q}$ invece, a^b ha solo un numero finito di valori. Se per esempio $b = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, allora $e^{2\pi i k b} = e^{2\pi i k/n}$ assume gli n valori delle radici n-sime dell'unità e pertanto a^b assume i valori

$$e^{\frac{\log a}{n}}, e^{\frac{\log a}{n}} e^{\frac{2\pi i}{n}}, \ldots, e^{\frac{\log a}{n}} e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}},$$

dove $\log a$ è un qualunque valore del logaritmo di a. Se infine b è irrazionale, allora $e^{2\pi i k b}$ e quindi a^b assumono infiniti valori.

Ricordando infine che per $b \in \mathbb{N}$ si ha $0^b = 0$ e si pone $0^0 = 1$, possiamo procedere a definire la funzione esponenziale con base $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ come

$$a^z = e^{z \log a},$$

dove si è fissato un valore di $\log a$; essa è intera e chiaramente la sua derivata è $a^z \log a$.

La funzione *potenza b-sima* z^b eredita invece le caratteristiche di $\log z$. Sia $b \in \mathbb{C}$ fissato; se $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è un aperto in cui è definito $\log z$, allora $e^{b \log z}$ si dice *ramo* di z^b. Ogni ramo di z^b è una funzione olomorfa con derivata uguale a

$$\frac{b}{z}\, e^{b \log z} = b\, e^{(b-1) \log z} = b z^{b-1}.$$

Si osservi infine che la relazione $(zw)^b = z^b w^b$ non vale per tutti i rami della potenza, ma solo se per il ramo di logaritmo corrispondente vale la relazione $\log(zw) = \log z + \log w$.

7.6. Singolarità e serie di Laurent

Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato un passaggio cruciale della teoria delle funzioni olomorfe: ogni funzione olomorfa (cioè dotata di derivata complessa) in un aperto è ivi di classe C^1 ed anzi di classe C^∞. Possiamo allora sfruttare i vantaggi della formula di Gauss-Green (7.8), per ottenere una serie di risultati utilissimi.

7.6.1. La formula di Cauchy-Stokes per funzioni di classe C^1. Il primo risultato è la seguente formula integrale di Cauchy-Stokes.

Teorema 7.6.1. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera ∂A formata da un'unione finita di curve semplici chiuse e C^1 a tratti.*

Se $f \in C^1(\overline{A})$ allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\int_A \frac{f_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta, \quad z \in A, \tag{7.19}$$

dove $d\xi d\eta$ indica l'elemento di area per la variabile $\zeta = \xi + i\eta$.

Dimostrazione. Fissiamo $z \in A$ e scegliamo $\varepsilon > 0$ in modo che $\overline{\mathbb{D}}_\varepsilon = \overline{\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \subset A$ e poniamo $A_\varepsilon = A \setminus \overline{\mathbb{D}}_\varepsilon$. Allora $+\partial A_\varepsilon = +\partial A - \partial\mathbb{D}_\varepsilon$. Dato che per $\zeta \in A_\varepsilon$ risulta che

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z},$$

la formula di Gauss-Green (7.8) implica che

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{A_\varepsilon} \frac{f_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial A_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial \mathbb{D}_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Si osservi ora che

$$\begin{aligned}\left|\int_{A_\varepsilon} \frac{f_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta - \int_A \frac{f_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta\right| = \\ \left|\int_{\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{f_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta\right| \le \max_{\overline{\mathbb{D}}_\varepsilon} |f_{\overline{\zeta}}| \int_{\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} = \\ 2\pi\varepsilon \max_{\overline{\mathbb{D}}_\varepsilon} |f_{\overline{\zeta}}|;\end{aligned}$$

pertanto l'integrale su A_ε converge a quello su A quando $\varepsilon \to 0$.

Inoltre abbiamo che

$$\int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i\, f(z) + \int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

e che

$$\left| \int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \le \int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}\, ds_\zeta \le \max_{\zeta\in\partial\mathbb{D}_\varepsilon} |f(\zeta) - f(z)| \int_{\partial\mathbb{D}_\varepsilon} \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z|} = 2\pi \max_{\zeta\in\partial\mathbb{D}_\varepsilon} |f(\zeta) - f(z)|;$$

l'integrale a primo membro tende dunque a 0 quando $\varepsilon \to 0$, per l'uniforme continuità di f.

La formula (7.19) segue allora passando al limite per $\varepsilon \to 0$ in (7.20). □

Da questo teorema e dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale segue subito il *teorema integrale di Cauchy per funzioni olomorfe.*

Teorema 7.6.2. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato con frontiera ∂A formata da un'unione finita di curve semplici chiuse e C^1 a tratti.*

Se $f \in C^1(\overline{A})$ è anche olomorfa in A, allora

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \quad z \in A,\ n \ge 0. \tag{7.21}$$

7.6.2. Serie di Laurent. Siano $z_0 \in \mathbb{C}$ e $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$; è utile definire ora la corona circolare

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

Una funzione f ammette uno *sviluppo in serie di Laurent* su $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ se

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, (z - z_0)^n \quad \text{per} \quad z \in \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$$

e la serie converge uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$.

Teorema 7.6.3. *Siano $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$ e sia $f : \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ olomorfa.*

Allora per ogni $z \in \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ risulta che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, (z - z_0)^n \quad \textit{per} \quad z \in \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) \tag{7.22}$$

e la serie converge uniformemente sui compatti contenuti in $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$*. Inoltre i coefficienti* c_n *sono univocamente determinati dalla formula*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta, \;\; n \in \mathbb{Z}, \tag{7.23}$$

per ogni $r \in (r_1, r_2)$*.*

Dimostrazione. Possiamo sempre supporre che $z_0 = 0$. Osserviamo subito che l'integrale in (7.23) non dipende da r; infatti, indicando con $\mathbb{D}_r$ il disco centrato in 0 e con raggio r, dato che la funzione $f(\zeta)/\zeta^{n+1}$ è olomorfa nella corona, per il Teorema 7.3.2 di Cauchy otteniamo che

$$\int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta - \int_{\partial \mathbb{D}_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta = 0,$$

per ogni $r, r' \in (r_1, r_2)$.

Fissati $z \in \mathbb{A}(0, r_1, r_2)$ e ρ_1, ρ_2 tali che $r_1 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < r_2$, la (7.21) per $n = 0$ implica che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{A}(0,\rho_1,\rho_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Si osservi ora che

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{\zeta} \dfrac{1}{1 - z/\zeta} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} & \text{se} \;\; |\zeta| = \rho_2 \\ -\dfrac{1}{z} \dfrac{1}{1 - \zeta/z} = -\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} & \text{se} \;\; |\zeta| = \rho_1, \end{cases}$$

dato che $|z/\zeta| < 1$ nel primo caso e $|\zeta/z| < 1$ nel secondo, essendo $\rho_1 < |z| < \rho_2$; inoltre, le due serie convergono uniformemente, una per $\zeta \in \partial \mathbb{D}_{\rho_2}$ e l'altra per $\zeta \in \partial \mathbb{D}_{\rho_1}$. Possiamo allora scambiare serie ed integrale nelle espressioni che seguono:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \right] z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \right] z^n = \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \right] z^n. \end{aligned}$$

Otteniamo quindi la formula (7.22).

Infine, se fosse

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k \, z^k$$

per altri coefficienti c'_k, allora otterremmo che

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_r} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k \, z^{k-n-1} \right) d\zeta =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k \, r^{n-k} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} \, d\theta = c'_n,$$

cioè i coefficienti in (7.22) sono univocamente determinati da (7.23). □

7.6.3. Funzioni meromorfe e singolarità. Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $E \subset A$ un sottoinsieme discreto di punti. Una funzione *meromorfa* su A è una funzione olomorfa sul complementare $A \setminus E$ tale che, fissato $z_0 \in E$, esistono un disco $\mathbb{D} \subset A$, centrato in z_0 tale che $\mathbb{D} \cap E = \{z_0\}$, e due funzioni g, h olomorfe su $\mathbb{D}$ tali che $h \not\equiv 0$ e $hf = g$ su $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$. I punti di E si dicono i *poli* di f.

È chiaro dalla definizione che, per verificare se una funzione sia meromorfa, si procede localmente. È evidente che una funzione olomorfa è anche meromorfa, con poli in un sottoinsieme discreto arbitrario, scegliendo $h \equiv 1$ e $g = f$. Funzioni meromorfe importanti sono le funzioni *razionali*, ossia i quozienti di polinomi complessi senza fattori in comune; i poli sono gli zeri del polinomio al denominatore.

Teorema 7.6.4. *Siano $z_0 \in \mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ un disco centrato in z_0 e $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$. Sia f olomorfa in $\mathbb{D}^*$ e sia*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n$$

il suo sviluppo in serie di Laurent centrato in z_0.

Allora f è meromorfa in $\mathbb{D}$ se e solo se esiste un intero $\nu \geq 0$ tale che $c_n = 0$ per ogni $n < -\nu$.

Dimostrazione. Se f è meromorfa su $\mathbb{D}$ allora, a meno di prendere un disco più piccolo centrato in z_0, esistono g ed h olomorfe su $\mathbb{D}$ tali che $h \not\equiv 0$ e $hf = g$ su $\mathbb{D}^*$. Dato che $h \not\equiv 0$, per qualche intero $\nu \geq 0$ risulta che $h(z) = (z - z_0)^\nu H(z)$, dove $H(z)$ è olomorfa e senza zeri in un intorno di z_0, che possiamo supporre sia ancora $\mathbb{D}$. Allora la funzione g/H è olomorfa ed ha uno sviluppo in serie di Taylor uniformemente convergente sui compatti contenuti in $\mathbb{D}$; sia esso $\sum_{k=0}^{\infty} c'_k(z-z_0)^k$. Pertanto su $\mathbb{D}^*$ abbiamo che

$$f(z) = (z-z_0)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(z-z_0)^k = \sum_{n=-\nu}^{\infty} c'_{n+\nu}(z-z_0)^k,$$

e la prima implicazione è dimostrata.

Viceversa, se per $f(z)$ vale lo sviluppo in serie di Laurent con $c_n = 0$ per $n < -\nu$, avremo che f è meromorfa dato che, prendendo $h(z) = (z-z_0)^\nu$, risulta che la funzione

$$g(z) = (z-z_0)^\nu f(z) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-\nu}(z-z_0)^k$$

è olomorfa su $\mathbb{D}$. □

Corollario 7.6.5. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed E un sottoinsieme discreto in A. Sia $f : A \setminus E \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*

Allora f è meromorfa su A se e solo se, per ogni $z_0 \in E$, f ha uno sviluppo in serie di Laurent centrato in z_0 che ha solo un numero finito di termini con esponenete negativo.

Se z_0 è un polo di una funzione meromorfa che ha lo sviluppo in serie di Laurent

$$\sum_{n=-\nu}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{con} \quad c_{-\nu} \neq 0,$$

il numero intero ν si dice l'*ordine* del polo z_0. È chiaro che se $\nu = 0$, il polo z_0 è una singolarità rimuovibile.

Osservazione 7.6.6. In modo analogo a quanto fatto nel Teorema 7.5.3 e Corollario 7.5.4, possiamo dimostrare che i poli di una funzione meromorfa sono isolati ed hanno ordine finito.

Il seguente risultato caratterizza il comportamento delle funzioni meromorfe in un intorno di una loro singolarità.

Teorema 7.6.7. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed E un sottoinsieme discreto in A. Sia $f : A \setminus E \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*

Allora f è meromorfa se e solo se, per ogni $z_0 \in E$, vale una delle seguenti condizioni:

(i) *f è limitata in un intorno $\mathbb{D}^*$ di z_0: in tal caso, esiste il limite di $f(z)$ per $z \to z_0$ ed f si estende olomorficamente su $\mathbb{D}$;*

(ii) $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Dimostrazione. Se vale (i), allora l'estensione di f fino a z_0 è conseguenza del Teorema 7.4.14. Quindi la serie di Laurent di f centrata in z_0 non ha termini con potenze di esponente negativo.

Se si verifica (ii), avremo che $|f(z)| > 1$ in un intorno $\mathbb{D}^*$ di z_0 e quindi la funzione $1/f$ è olomorfa e limitata nello stesso intorno e quindi si può estendere ad una funzione olomorfa h su $\mathbb{D}$, sempre per il Teorema 7.4.14; ma allora $h(z)f(z) = 1$ su $\mathbb{D}^*$, cioè f è meromorfa su $\mathbb{D}$.

Viceversa, sia f meromorfa e sia E l'insieme dei suoi poli. Se $f \equiv 0$, non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, sia $z_0 \in E$ e siano g ed h le funzioni olomorfe tali che $hf = g$ in un intorno $\mathbb{D}^*$ di z_0 della definizione. Dato che sia f che $h \not\equiv 0$, anche $g \not\equiv 0$ e quindi si potrà scrivere che

$$g(z) = (z - z_0)^n G(z) \quad \text{e} \quad h(z) = (z - z_0)^m H(z),$$

per due interi $n, m \geq 0$, dove G ed H sono olomorfe e $G(z_0), H(z_0) \neq 0$. Dunque in $\mathbb{D}^*$ avremo:

$$f(z) = (z - z_0)^{n-m} \frac{G(z)}{H(z)}.$$

Se $n - m \geq 0$ si verifica il caso (i); se $n - m < 0$ si verifica invece (ii). $\square$

Corollario 7.6.8. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed E un sottoinsieme discreto in A. Sia $f : A \setminus E \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*

Allora f è meromorfa se e solo se esiste una funzione continua f^* da A alla sfera di Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ che estende f.

Esempio 7.6.9. Esistono funzioni che non sono meromorfe. La funzione $e^{1/z}$ per esempio è definita fuori di $z = 0$, risulta che

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

e la serie converge uniformemente sui compatti che non contengono 0. La serie di Laurent ha quindi infiniti termini con esponente negativo.

Se f è olomorfa in un intorno di un punto z_0 ed f non è meromorfa, allora si dice che z_0 è una *singolarità essenziale* per f.

Il seguente risultato descrive il comportamento di una funzione olomorfa nei dintorni di una sua singolarità essenziale.

Teorema 7.6.10 (Casorati-Weiestrass)**.** *Se z_0 è una singolarità essenziale per f allora, per ogni disco $\mathbb{D}$ con centro in z_0, l'insieme $f(\mathbb{D}^*)$, dove $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{z_0\}$, è denso in $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Se per qualche intorno $\mathbb{D}$ di z_0 l'insieme $f(\mathbb{D}^*)$ non fosse denso in $\mathbb{C}$, allora $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{D}^*)}$ conterrebbe un disco; siano $w \in \mathbb{C}$ il suo centro ed $r > 0$ il suo raggio: si avrebbe che $|f(z) - w| \geq r$ per ogni $z \in \mathbb{D}^*$.

Allora la funzione $1/[f(z) - w]$ sarebbe olomorfa e limitata su $\mathbb{D}^*$; per il Teorema 7.4.14, essa si può estendere ad una funzione olomorfa h su tutto $\mathbb{D}$. Pertanto su $\mathbb{D}^*$ si avrebbe $hf = 1 + w\,h$, cioè f sarebbe meromorfa, contro l'ipotesi. $\square$

Osservazione 7.6.11. Possiamo quindi affermare che una funzione olomorfa può avere tre tipi di comportamento in un intorno di un punto z_0:

(i) f è limitata e si può estendere olomorficamente in z_0;

(ii) f è meromorfa, z_0 è un polo e $|f(z)|$ diverge per $z \to z_0$;

(iii) z_0 è una singolarità essenziale per f ed il limite per $z \to z_0$ di $|f(z)|$ non esiste.

7.7. Il teorema dei residui

In questa sezione, presentiamo uno dei risultati più importanti della teoria delle funzioni olomorfe, che ha conseguenze sia teoriche che per le applicazioni.

7.7.1. Residui. Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed E un su sottoinsieme discreto. Sia f olomorfa su $A \setminus E$ e supponiamo che, in un intorno $\mathbb{D}^*$ di $z_0 \in E$, f abbia lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Il numero c_{-1} si dice il *residuo di f in z_0* e si indica con $\mathrm{Res}_{z_0}(f)$. La seguente proposizione è di immediata dimostrazione.

Proposizione 7.7.1. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, E un suo sottoinsieme discreto e sia f una funzione olomorfa su $A \setminus E$.*

(i) Se $z_0 \in E$, allora

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}(z_0,\rho)} f(z)\,dz, \tag{7.24}$$

per ogni $\rho > 0$ tale che $\mathbb{D}(z_0, \rho) \subset \overline{\mathbb{D}(z_0, \rho)} \subset A$ e $\overline{\mathbb{D}(z_0, \rho)} \cap E = \{z_0\}$.

(ii) Se $z_0 \in E$ è un polo di ordine $\nu \geq 1$ per f, allora

$$(\nu - 1)!\,\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial z^{\nu-1}} [(z - z_0)^\nu f(z)]. \tag{7.25}$$

Dimostrazione. (i) La dimostrazione è immediata e segue dalla (7.23).

(ii) Per l'ipotesi abbiamo che

$$f(z) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

con $c_{-\nu} \neq 0$ e quindi la funzione

$$(z-z_0)^\nu f(z) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-\nu}(z-z_0)^k$$

ha estensione olomorfa $g(z)$ in z_0, per il Teorema 7.4.14. Avremo quindi che

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial z^{\nu-1}}[(z-z_0)^\nu f(z)] = g^{(\nu-1)}(z_0) = (\nu-1)!\, c_{-1},$$

dopo aver derivato $\nu - 1$ volte termine a termine l'ultima serie. □

Osservazione 7.7.2. In alcuni casi un modo spiccio per calcolare il residuo è il seguente.

Siano g ed h due funzioni olomorfe in un aperto $A \subset \mathbb{C}$ e sia $z_0 \in A$. Se $h(z_0) = 0$ e $g(z_0), h'(z_0) \neq 0$ allora, dato che avremo che $h(z) = (z-z_0)H(z)$ con H olomorfa e $H(z_0) = h'(z_0) \neq 0$, risulta che la funzione $f = g/h$ ha un polo di ordine 1 in z_0. Inoltre la formula (7.25) con $\nu = 1$ implica che

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)\, f(z)] = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{H(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

La formula di Cauchy implica quasi immediatamente la seguente versione semplificata del Teorema dei Residui.

Teorema 7.7.3 (dei Residui)**.** *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto, E un suo sottoinsieme discreto e sia f una funzione olomorfa su $A \setminus E$. Sia inoltre A' un aperto limitato con $\overline{A'} \subset A$ e con frontiera Γ che è unione finita di curve semplici, chiuse, C^1 a tratti e tra loro disgiunte.*

Se $E \cap \Gamma = \varnothing$ ed $E \cap A' = \{z_1, \ldots, z_J\}$, allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{J} \mathrm{Res}_{z_j}(f). \tag{7.26}$$

Dimostrazione. Per $j = 1, \ldots, J$, sia $\mathbb{D}_j$ un disco centrato in z_j; scegliamo inoltre il raggio di $\mathbb{D}_j$ in modo che la sua chiusura sia contenuta in A' e non intersechi la chiusura di tutti gli altri. Posto $A^* = A' \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \overline{\mathbb{D}_j}$ ed indicata con $+\Gamma_j$ la frontiera orientata di $\mathbb{D}_j$, abbiamo che $+\partial A^* = +\Gamma - \Gamma_1 - \cdots - \Gamma_J$.

Pertanto, dato che f è olomorfa in A^*, si ha che

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial A^*} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\Gamma} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{J}\frac{1}{2\pi i}\int_{+\Gamma_j} f(z)\,dz,$$

e quindi (7.26) segue da (7.24). □

7.7.2. Calcolo di alcuni integrali definiti. Il Teorema dei Residui ci permette di calcolare molti integrali definiti che, con gli strumenti dell'integrazione di funzioni di una variabile reale, non eravamo in grado di calcolare.

Esempio 7.7.4. Siano $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ polinomi a coefficienti reali di grado n and m, rispettivamente, e supponiamo che $m \geq n+2$ e che $Q_m(x)$ non abbia radici reali (dunque m è pari). In queste ipotesi, con i teoremi di confronto per gli integrali impropri, è facile verificare che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, dx$$

converge.

Sia $f(z) = P_n(z)/Q_m(z)$ la funzione razionale su $\mathbb{C}$ che estende la funzione reale $P_n(x)/Q_m(x)$ e siano $z_1, \ldots, z_J$ i poli di f contenuti nel semipiano superiore in cui $\mathrm{Im} z > 0$. Allora otteniamo che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{J} \mathrm{Res}_{z_j}(f).$$

Infatti, sia γ_r la frontiera, orientata in senso antiorario, del semi-disco superiore di raggio r centrato nell'origine. Se r è abbastanza grande, tale semi-disco contiene tutti i poli di f al suo interno. Per la (7.26) si ha dunque che

$$2\pi i \sum_{j=1}^{J} \mathrm{Res}_{z_j}(f) = \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_0^{\pi} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta.$$

D'altra parte, dato che $P_n(z) = p_n z^n + \cdots$ e $Q_m(z) = q_m z^m + \cdots$ con $p_n, q_m \neq 0$, abbiamo che

$$|f(re^{i\theta})| = r^{n-m} \frac{|p_n| + o(1)}{|q_m| + o(1)} \quad \text{per} \quad r \to \infty,$$

uniformemente per $0 \leq \theta \leq \pi$, e quindi

$$\lim_{r\to\infty} \left| \int_0^{\pi} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \lim_{r\to\infty} r \int_0^{\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta = 0.$$

Pertanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{J} \mathrm{Res}_{z_j}(f).$$

Per esempio, dato che $(1+z^4)^{-1}$ ha solo poli semplici e solo due ($e^{i\pi/4}$ e $e^{3i\pi/4}$) appartengono al semipiano superiore, l'Osservazione 7.7.2 implica che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left[\frac{1}{4(e^{i\pi/4})^3} + \frac{1}{4(e^{3i\pi/4})^3}\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Esempio 7.7.5. Siano $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ polinomi a coefficienti reali tali che $Q(\cos t, \sin t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Posto $R(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$, possiamo calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt,$$

mediante in Teorema dei Residui.

Si osserva infatti che

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) dt = \int_{\partial\mathbb{D}} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz},$$

avendo posto $z = e^{it}$ ed osservato che $e^{-it} = z^{-1}$ e $dz = ie^{it}dt = izdt$.

Di conseguenza

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int_{\partial\mathbb{D}} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz},$$

dove $\mathbb{D}$ è il disco unitario. Se $f(z)$ indica la funzione integranda e $z_1, \ldots, z_J$ i suoi poli in $\mathbb{D}$, allora otteniamo la formula:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi i \sum_{j=1}^{J} \mathrm{Res}_{z_j}(f).$$

Esempio 7.7.6. Se $g \in L^1(\mathbb{R})$, la funzione

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-i\xi x} dx, \quad -\infty < \xi < \infty,$$

è ben definita e si dice la *trasformata di Fourier di g*. Possiamo allora calcolare la trasformata di Fourier di funzioni razionali del tipo considerato nell'Esempio 7.7.4. Si ottiene che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, e^{-i\xi x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{J} \mathrm{Res}_{z_j}(f),$$

dove $z_1, \ldots, z_J$ sono i poli, appartenenti al semipiano superiore se $\xi \leq 0$ ed a quello inferiore se $\xi \geq 0$, della funzione

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\, e^{-i\xi z}.$$

Riportiamo la dimostrazione della formula nel caso particolare del cosiddetto *nucleo di Poisson*,

$$P_s(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{s}{x^2+s^2}, \quad -\infty < x < \infty,\ s > 0,$$

che riveste grande importanza nello studio delle funzioni armoniche nel piano. La dimostrazione del caso generale sopra enunciato si sviluppa in modo molto simile.

Consideriamo allora la funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{e^{-i\xi z}}{z^2+s^2},$$

che ha i soli due poli is e $-is$. Se γ_r è la curva considerata nell'Esempio 7.7.4, per (7.26) si avrà che

$$2\pi i\,\mathrm{Res}_{is}(f) = \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta,$$

per ogni $r > s$.

Se $\xi \le 0$, abbiamo che

$$|f(re^{i\theta})| = \frac{e^{r\xi\sin\theta}}{|(re^{i\theta})^2+s^2|} \le \frac{e^{r\xi\sin\theta}}{r^2-s^2} \le \frac{1}{r^2-s^2},$$

dato che $\sin\theta \ge 0$ per $0 \le \theta \le \pi$. Perciò l'integrale $\int_0^{\pi} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta$ è infinitesimo per $r \to \infty$. Per $\xi \le 0$ otteniamo quindi che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\pi i\,\frac{e^{-i\xi is}}{2is} = \frac{\pi}{s}\,e^{s\,\xi},$$

dove per esempio si è usata l'Osservazione 7.7.2. Quando $\xi > 0$, è invece conveniente integrare sulla frontiera del semi-disco inferiore e con argomenti simili si ottiene che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{s}\,e^{-s\,\xi}.$$

In conclusione:

$$\widehat{P}_s(\xi) = e^{-s\,|\xi|}, \quad -\infty < \xi < \infty,\ s > 0.$$

Esempio 7.7.7. È noto che l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

converge, ma non assolutamente. Inoltre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x/2)}{x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx,$$

dopo un'integrazione per parti e qualche ovvia manipolazione. Dimostriamo ora che
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

Osserviamo che $(\sin x)/x = \operatorname{Im}\{e^{ix}/x\}$ e che la funzione $g(z) = e^{iz}/z$ è meromorfa in $\mathbb{C}$ con un unico polo per $z = 0$. Consideriamo l'unione del semi-disco chiuso superiore di raggio $r > 1$ centrato in 0 con con il semi-disco inferiore con lo stesso centro e raggio $1/r$ e sia γ_r la sua frontiera orientata in senso antiorario. La (7.24) e l'Osservazione 7.7.2 implicano che

$$\int_{\gamma_r} g(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0(g) = 2\pi i\, \frac{e^{i0}}{1} = 2\pi i.$$

Spezzando l'integrazione sulle 4 componenti di γ_r, otteniamo che

$$2\pi i = \int_{-r}^{-1/r} g(x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} g(e^{i\theta}/r)\, \frac{ie^{i\theta}}{r}\, d\theta + \int_{1/r}^{r} g(x)\, dx + \int_0^{\pi} g(re^{i\theta})\, ire^{i\theta} d\theta.$$

È chiaro che
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{Im}\left[\lim_{r\to\infty}\left(\int_{-r}^{-1/r} g(x)\, dx + \int_{1/r}^{r} g(x)\, dx\right)\right];$$
pertanto:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = 2\pi - \operatorname{Im}\left[\lim_{r\to\infty}\left(\int_{\pi}^{2\pi} g(e^{i\theta}/r)\, \frac{ie^{i\theta}}{r}\, d\theta + \int_0^{\pi} g(re^{i\theta})\, ire^{i\theta} d\theta\right)\right].$$
Ora, ricordandosi l'espressione di $g(z)$, abbiamo che
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\pi}^{2\pi} g(e^{i\theta}/r)\, \frac{ie^{i\theta}}{r}\, d\theta = i \lim_{r\to\infty} \int_{\pi}^{2\pi} e^{ie^{i\theta}/r}\, d\theta = \pi i,$$
mentre
$$\left|\int_0^{\pi} g(re^{i\theta})\, ire^{i\theta} d\theta\right| = \left|i\int_0^{\pi} e^{ire^{i\theta}}\, d\theta\right| \le \int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}\, d\theta,$$
dove l'ultimo integrale tende a zero se $r \to \infty$, per il Teorema 4.7.3 della Convergenza Dominata. Otteniamo così la formula annunciata.

In molte situazioni è necessario calcolare limiti simili all'ultimo calcolato nell'esempio precedente. È quindi comodo avere a disposizione il seguente risultato.

Lemma 7.7.8 (di Jordan)**.** *Siano* $\overline{\mathbb{H}}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \geq 0\}$ *e* $\gamma_r = \{z \in \overline{\mathbb{H}}_+ : |z| = r\}$*. Sia* h *una funzione olomorfa su un aperto contenente* $\overline{\mathbb{H}}_+$ *tranne al più un numero finito di singolarità.*

Se

$$\lim_{\overline{\mathbb{H}}_+ \ni z \to \infty} h(z) = 0,$$

allora per ogni $\alpha > 0$ *risulta:*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} e^{i\alpha z} h(z)\, dz = 0.$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\int_{\gamma_r} e^{i\alpha z} h(z)\, dz = \int_0^\pi h(re^{i\theta}) e^{i\alpha r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta$$

e quindi

$$\left| \int_{\gamma_r} e^{i\alpha z} h(z)\, dz \right| \leq r \int_0^\pi |h(re^{i\theta})| e^{-\alpha r \sin\theta} d\theta.$$

L'ipotesi su h implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste R tale che $|h(re^{i\theta})| < \varepsilon$ se $r > R$ per ogni $\theta \in [0.\pi]$ e quindi

$$\left| \int_{\gamma_r} e^{i\alpha z} h(z)\, dz \right| \leq \varepsilon \int_0^\pi r e^{-\alpha r \sin\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{\alpha}\,\varepsilon,$$

per ogni $r > R$, dove nell'ultimo passaggio si è usato la disuguaglianza $\sin\theta \geq 1 - |1 - 2\theta/\pi|$ per $0 \leq \theta \leq \pi$.[2] La conclusione segue per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

7.7.3. Somme di serie numeriche. Con il Teorema dei Residui si possono anche calcolare le somme di certe serie numeriche, come mostra questo esempio.

Esempio 7.7.9. La funzione

$$\cot \pi z = \cos \pi z / \sin \pi z$$

è meromorfa su $\mathbb{C}$ ed i suoi poli sono gli interi $n \in \mathbb{Z}$. L'Osservazione 7.7.2 inoltre implica che ogni polo n ha ordine 1 e

$$\mathrm{Res}_n[\cot \pi z] = \frac{1}{\pi}.$$

Questa formula, vista dal punto di vista del Teorema dei Residui, suggerisce un metodo per sommare le serie numeriche.

[2] Il grafico di $\sin\theta$ sovrasta il triangolo isoscele con base $[0, \pi]$ e altezza 1.

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi. L'Osservazione 7.7.2 ci dice ancora che, se f è una funzione meromorfa tale che $f(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$, allora

$$\operatorname{Res}_n[f(z)\,\cot \pi z] = \frac{1}{\pi}\,a_n;$$

in particolare, la funzione $g(z) = \cot \pi z/z^{2k}$ ha i residui

$$\operatorname{Res}_n(g) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{n^{2k}} \quad \text{per} \quad n \neq 0.$$

Per calcolare $\operatorname{Res}_0(g)$ osserviamo che lo sviluppo in serie di Laurent di $\cot \pi z$ in 0 si può scrivere come

$$\cot \pi z = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m-1}\, z^{2m-1},$$

dato che essa è dispari e, come osservato, 0 è un polo di ordine 1. Pertanto abbiamo che

$$g(z) = b_{-1}\, z^{-2k-1} + b_1\, z^{-2k+1} + \cdots + b_{2k-1}\, z^{-1} + \sum_{m=k+1}^{\infty} b_{2m-1}\, z^{2m-2k-1}$$

e quindi che

$$\operatorname{Res}_0(g) = b_{2k-1}.$$

I numeri $B_{2k} = \pi(2k!)b_{2k-1}/(2\pi)^{2k}$ si dicono i *numeri di Bernoulli*; si ha per esempio che

$$b_{-1} = \frac{1}{\pi},\ b_1 = -\frac{\pi}{3},\ b_3 = -\frac{\pi^3}{45},\ b_5 = -\frac{2\pi^5}{945}.$$

Sia ora $\nu \in \mathbb{N}$ e sia $\mathcal{Q}_\nu$ il quadrato centrato nell'origine e lati di lunghezza $2\nu+1$ e paralleli agli assi reale ed immaginario. Si noti che $\partial\mathcal{Q}_\nu$ *non* interseca mai il reticolo dei punti con coordinata intera. Il Teorema 7.7.3 ci informa allora che

$$\int_{\partial\mathcal{Q}_\nu} g(z)\,dz = \sum_{n=-\nu}^{\nu} \operatorname{Res}_n(g) =$$

$$2\sum_{n=1}^{\nu} \operatorname{Res}_n(g) + \operatorname{Res}_0(g) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{n^{2k}} + b_{2k-1},$$

visto che $\mathcal{Q}_\nu$ contiene tutti e soli i poli $-\nu, \dots, 0, \dots, \nu$.

Dimostreremo ora che

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\partial\mathcal{Q}_\nu} g(z)\,dz = 0,$$

ottenedo quindi le formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{\pi}{2}\, b_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

ed in particolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Osserviamo preliminarmente che $|\cot \pi z| \leq \coth(\pi/2)$ per ogni $z \in \partial\mathcal{Q}_\nu$ e $\nu \in \mathbb{N}$. Infatti, dato che

$$|\cot \pi z|^2 = \frac{\cos^2 \pi x\, \cosh^2 \pi y + \sin^2 \pi x\, \sinh^2 \pi y}{\sin^2 \pi x\, \cosh^2 \pi y + \cos^2 \pi x\, \sinh^2 \pi y} \leq \coth^2 \pi y,$$

allora per i punti $z = x + iy \in \partial\mathcal{Q}_\nu$ tali che $|y| = \nu + 1/2 \geq 1/2$, si ha che $|\coth \pi z|^2 \leq \coth^2(\pi/2)$, mentre per i punti $z = x + iy \in \partial\mathcal{Q}_\nu$ tali che $|x| = \nu + 1/2$ si ha invece che $|\cot \pi z|^2 = \tanh^2 \pi y < 1$; dunque abbiamo che $|\cot \pi z|^2 \leq \max(1, \coth(\pi/2)) = \coth(\pi/2)$ per ogni $z \in \partial\mathcal{Q}_\nu$.

Pertanto

$$\left| \int_{\partial\mathcal{Q}_\nu} g(z)\, dz \right| \leq \coth(\pi/2) \int_{\partial\mathcal{Q}_\nu} \frac{ds}{|z|^{2k}} \leq \\ \coth(\pi/2) \int_{\partial\mathcal{Q}_\nu} \frac{ds}{\nu^{2k}} = \frac{4(2\nu+1)}{\nu^{2k}} \coth(\pi/2),$$

dato che $\mathcal{Q}_\nu$ contiene il disco concentrico di raggio ν (e quindi $|z| \geq \nu$ per $z \in \partial\mathcal{Q}_\nu$) ed il perimetro di $\mathcal{Q}_\nu$ è uguale a $4(2\nu + 1)$. L'ultimo termine nella disuguaglianza è infinitesimo per $\nu \to \infty$.

7.7.4. Il principio dell'argomento. Una conseguenza teorica del Teorema dei Residui è il seguente risultato.

Teorema 7.7.10 (Principio dell'Argomento)**.** *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia f una funzione olomorfa in A, tranne in un insieme discreto di punti. Sia $\Omega \subset A$ un aperto limitato con chiusura contenuta in A e con frontiera $\partial\Omega$ che è unione finita di curve semplici, chiuse, di classe C^1 a tratti ed a due a due disgiunte.*

Supponiamo che f non abbia zeri né poli su $\partial\Omega$ ed indichiamo con z_j e $\mu(z_j)$, $j = 1, \ldots, J$, gli zeri di f in Ω con rispettive molteplicità e con p_k e $\nu(p_k)$, $k = 1, \ldots, K$, i poli di f in Ω con rispettivi ordini.

Allora risulta che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{J} \mu(z_j) - \sum_{k=1}^{K} \nu(p_k). \tag{7.27}$$

Dimostrazione. Per semplicità poniamo $\mu_j = \mu(z_j)$ e $\nu_k = \nu(p_k)$. Osserviamo anche che $J, K < \infty$. Esiste quindi una funzione olomorfa h su un aperto contenente $\overline{\Omega}$ e che non si annulla in Ω tale che

$$f(z) = \frac{(z-z_1)^{\mu_1}\cdots(z-z_J)^{\mu_J}}{(z-p_1)^{\nu_1}\cdots(z-p_K)^{\nu_K}}\,h(z).$$

Osservando che per due funzioni olomorfe ϕ e ψ vale la formula

$$\frac{(\phi\psi)'}{\phi\psi} = \frac{\phi'}{\phi} + \frac{\psi'}{\psi}$$

ovunque abbia senso, otteniamo allora che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{J}\frac{\mu_j}{z-z_j} - \sum_{k=1}^{K}\frac{\nu_k}{z-p_k} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

e l'ultimo addendo è una funzione olomorfa su un aperto contenente $\overline{\Omega}$. Tenendo conto di (7.19) (ponendo in essa $f \equiv 1$), un calcolo immediato ci dà allora (7.27). $\square$

Osservazione 7.7.11. Se $f \neq 0$ in un aperto A, allora si può definire $\log f(z)$ con le osservazioni fatte nella Sottosezione 7.5.4. Dato che ogni ramo della funzione logaritmo è olomorfo, ogni corrispondente ramo di $\log f(z)$ è olomorfo e si ha

$$\frac{d}{dz}\log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Se $\gamma : [0,1] \to A$ è una curva C^1, si potrà calcolare allora:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(z(t))}{f(z(t))}\,z'(t)\,dt =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\log f(z(t))\Big|_0^1 = \frac{1}{2\pi i}\Big[\log|f(z(t))| + i\,\arg f(z(t))\Big]_0^1.$$

Se γ è chiusa ed è percorsa in senso anti-orario, otteniamo allora la formula:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\,[\arg f(z(1)) - \arg f(z(0))].$$

La quantità tra parentesi quadre è l'aumento di $\arg f$ quando si percorre la curva chiusa γ (in senso anti-orario) e si indica spesso con $\Delta_\gamma(\arg f)$. È chiaro che la formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\gamma(\arg f)$$

continua a valere se γ è C^1 a tratti e giustifica perché il Teorema 7.7.10 si dice il *Principio dell'Argomento*.

Corollario 7.7.12 (Teorema di Rouché). *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto limitato e siano $g, h \in C^0(\overline{A})$ due funzioni olomorfe in A.*

Se

$$|g(z)| < |h(z)| \quad \text{per ogni} \quad z \in \partial A,$$

allora h e $g + h$ hanno lo stesso numero di zeri in A.

Dimostrazione. Dato che $|g + h| \geq |h| - |g| > 0$ e $|h| > |g| \geq 0$ su ∂A, la continuità di g ed h implica che h e $g + h$ non si annullano nella chiusura di un intorno di ∂A in $\overline{A}$. Se escludiamo la chiusura di questo intorno, otteniamo un aperto che contiene tutti gli zeri di h e $g + h$; indicheremo con A' quest'ultimo aperto.

Sia Ω un aperto con $A' \subset \overline{A'} \subset \Omega \subset \overline{\Omega} \subset A$ del tipo usato nel Teorema 7.7.10. Dobbiamo allora dimostrare che

$$\Delta_{\partial\Omega}[\arg(g + h)] = \Delta_{\partial\Omega}[\arg h].$$

Osserviamo allora che

$$\Delta_{\partial\Omega}[\arg(g + h)] = \Delta_{\partial\Omega}[\arg h] + \Delta_{\partial\Omega}[\arg(1 + g/h)]$$

e che $|g/h| < 1$ su $\partial\Omega$. L'immagine di $\partial\Omega$ tramite $1 + g/h$ è quindi contenuta nel disco di raggio 1 centrato in 1 e l'origine rimane all'esterno di esso. Ne segue dunque che $\Delta_{\partial\Omega}[\arg(1 + g/h)] = 0$. □

7.8. Successioni di funzioni olomorfe

Le funzioni olomorfe in un aperto formano chiaramente un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni continue. In questo paragrafo studieremo alcune proprietà di tale sottospazio rispetto alla convergenza uniforme di funzioni.

7.8.1. Disuguaglianze di Cauchy. Le *disuguaglianze di Cauchy* dimostrate nel teorema seguente, sono alla base dei teoremi di convergenza di successioni di funzioni olomorfe e di altri risultati notevoli.

Teorema 7.8.1 (Disuguaglianze di Cauchy). *Sia f una funzione olomorfa in un intorno del disco chiuso $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}(z_0, r)}$. Per ogni $\delta \in (0, r)$ ed $n = 0, 1, 2, \ldots$, si ha che*

$$|f^{(n)}(z)| \leq r \frac{n!}{\delta^{n+1}} \max_{\partial\mathbb{D}} |f|, \quad z \in \overline{\mathbb{D}(z_0, r - \delta)}, \tag{7.28}$$

ed inoltre

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{\partial\mathbb{D}} |f|. \tag{7.29}$$

Dimostrazione. Dato che $|\zeta - z| \geq \delta$ se $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ e $z \in \overline{\mathbb{D}(z_0, r-\delta)}$, la formula (7.15) implica che

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi\, \delta^{n+1}}\, L(\partial\mathbb{D}) \max_{\partial\mathbb{D}} |f| = r\, \frac{n!}{\delta^{n+1}} \max_{\partial\mathbb{D}} |f|.$$

Passando al limite in (7.28) per $z \to z_0$ e $\delta \to r$, si ottiene la (7.29). □

Corollario 7.8.2. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e K un suo sottoinsieme compatto.*

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una costante $C_n = C_n(K, A)$ tale che

$$\max_K |f^{(n)}| \leq C_n \sup_A |f| \quad \textit{per ogni } f \textit{ olomorfa su } A. \tag{7.30}$$

Dimostrazione. Sia $2d = \min\{\mathrm{dist}(z, \partial A) : z \in K\}$; è chiaro che $d > 0$. Dato che $\overline{\mathbb{D}} = \overline{\mathbb{D}(z_0, d)} \subset A$ per ogni $z_0 \in K$, dalla (7.29) segue che

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{d^n} \max_{\partial\mathbb{D}} |f| \leq C_n \sup_A |f|,$$

avendo posto $C_n = n!/d^n$. □

7.8.2. Convergenza di successioni di funzioni olomorfe. Nella topologia della convergenza uniforme sui compatti, lo spazio delle funzioni olomorfe è chiuso nello spazio delle funzioni continue su un aperto. Questo è il contenuto del seguente risultato.

Teorema 7.8.3 (Weierstrass)**.** *Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$, uniformemente convergente su ogni compatto $K \subset A$ ad una funzione f.*

Allora f è olomorfa in A e le successioni delle derivate di ogni ordine delle f_k convergono uniformemente su ogni compatto $K \subset A$ alle corrispondenti derivate di f.

Dimostrazione. La convergenza uniforme implica che f è continua su ogni K e quindi su A. Inoltre, per ogni triangolo chiuso $\Delta \subset A$, si ha che

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \lim_{k\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_k(z)\, dz = 0$$

e quindi, per il Teorema di Morera (Corollario 7.4.13), f è olomorfa in A.

La seconda asserzione segue evidentemente dalla disuguaglianza (7.30) applicata alle funzioni $f_k^{(n)} - f^{(n)}$. □

Il seguente Teorema di Montel mostra come, nel caso di successioni di funzioni olomorfe, le ipotesi del Teorema 6.7.4 di Ascoli-Arzelà si possano semplificare.

Teorema 7.8.4 (Montel)**.** *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni olomorfe su un aperto $A \subset \mathbb{C}$, equilimitata su ogni compatto contenuto in A.*

Allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti contenuti in A ad una funzione olomorfa in A.

Dimostrazione. Basterà dimostrare che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è anche equicontinua su ogni compatto contenuto in A, per poi applicare lo schema del Teorema di Ascoli-Arzelà ed il Teorema 7.8.3.

Sia $K \subset A$ un compatto e si consideri un suo ricoprimento finito fatto di dischi aperti con chiusura contenuta in A; l'unione delle chiusure di tali dischi è un altro compatto, che contiene K al suo interno ed è contenuto in A: lo indicheremo con K^*.

Poiché la successione è equilimitata su K^* esiste una costante M tale che $|f_n| \le M$ su K^* per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il Corollario 7.8.2 ci informa allora che

$$\max_K |f_n'| \le C_1 \max_{K^*} |f_n| \le C_1 M,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo implica che le f_n sono equi-lipschitziane e quindi equicontinue su K^*; infatti se d indica la distanza di K da ∂K^* allora, per ogni coppia di punti $z_1, z_2 \in K$ tali che $|z_1 - z_2| < d$, il segmento σ che li congiunge è contenuto in K^* e quindi

$$|f_n(z_2) - f_n(z_1)| = \left| \int_\sigma f_n'(z)\, dz \right| \le |z_2 - z_1| \max_\sigma |f_n'| \le C_1 M\, |z_2 - z_1|.$$

Possiamo ora prendere una successione di aperti A_k con chiusura compatta e tali che $\overline{A}_k \subset A_{k+1}$ per $k \in \mathbb{N}$ e $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Procediamo ora come nella dimostrazione del Teorema di Ascoli-Arzelà: per questo teorema, esiste una sottosuccessione $\{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente su $\overline{A}_1$; ancora, esiste una sottosuccessione $\{f_n^2\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente su $\overline{A}_2$, e così via. La successione $\{f_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, $f_n^n \in \{f_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni $n \ge k$ e quindi converge uniformemente su $\overline{A}_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Pertanto, se $K \subset A$ è un compatto qualsiasi, esisterà un $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che $K \subset A_{\overline{k}}$ e quindi $\{f_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su K. Il Teorema 7.8.3 garantisce che la funzione limite è olomorfa. □

7.9. Proprietà topologiche e geometriche

Sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione continua; f può essere interpretata come una trasformazione dell'aperto A nell'insieme $f(A)$. In questa sezione, presentiamo alcuni risultati sulle funzioni olomorfe, che possono essere interpretati come proprietà topologiche o geometriche della trasformazione f.

7.9.1. Conformalità. Cominciamo con una proprietà fondamentale delle funzioni olomorfe: esse conservano l'angolo formato da ogni coppia di curve passanti per un punto, come è specificato nel Teorema 7.9.1 qui sotto. Questa proprietà si dice *conformalità*; e per questo le funzioni olomorfe a volte vengono dette *applicazioni conformi.*.

Teorema 7.9.1. *Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f : A \to \mathbb{C}$ un'applicazione di classe C^1 tale che $|f_z| + |f_{\overline{z}}| > 0$ su A.*

Allora f è olomorfa se e solo se conserva l'angolo formato tra curve passanti per ogni punto di A e in questo caso si ha che $f' \neq 0$ in A.

Dimostrazione. Siano $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \to \gamma_j(t)$, $j = 1, 2$, due curve regolari con sostegno in A e che si incontrano in un punto z_0 e cioè tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$. L'angolo (orientato) fra le due curve in z_0 non è altro che l'angolo tra i rispettivi vettori tangenti $\gamma_1'(0)$ e $\gamma_2'(0)$ e quindi, per la formula (7.1), è uguale a

$$\arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}.$$

La funzione $f : A \to \mathbb{C}$ definisce allora due curve, ponendo $\Gamma_j(t) = f(\gamma_j(t))$, $j = 1, 2$, tali che $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = f(z_0)$.

Se f soddisfa le ipotesi del teorema ed è olomorfa in A, allora $f'(z_0) \neq 0$ e quindi avremo che

$$\Gamma_j'(0) = f_z(\gamma_j(0))\, \gamma_j'(0) + f_{\overline{z}}(\gamma_j(0))\, \overline{\gamma_j'(0)} = f'(z_0)\, \gamma_j'(0), \quad j = 1, 2,$$

e quindi $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \to \Gamma_j(t)$, $j = 1, 2$, sono due curve regolari in un intorno del punto $f(z_0)$ in cui si incontrano. L'angolo formato tra queste due curve sarà dunque uguale a

$$\arg \frac{\Gamma_2'(0)}{\Gamma_1'(0)} = \arg \frac{f'(z_0)\, \gamma_2'(0)}{f'(z_0)\, \gamma_1'(0)} = \arg \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)},$$

ossia f conserva l'angolo orientato fra le curve passanti per z_0.

Viceversa, fissato un angolo θ, consideriamo il segmento $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \to \gamma_\theta(t) = z_0 + t\, e^{i\theta} \in A$ e poniamo $\Gamma_\theta(t) = f(\gamma_\theta(t))$.

Se f conserva l'angolo orientato fra curve passanti per ogni punto $z_0 \in A$, avremo che

$$\arg e^{i\theta} = \arg \frac{\gamma_\theta'(0)}{\gamma_0'(0)} = \arg \frac{\Gamma_\theta'(0)}{\Gamma_0'(0)} = \arg \frac{f_z(z_0)\, e^{i\theta} + f_{\overline{z}}(z_0)\, e^{-i\theta}}{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)}$$

e quindi, per le proprietà dell'argomento,

$$0 = \arg \frac{f_z(z_0)\, e^{i\theta} + f_{\overline{z}}(z_0)\, e^{-i\theta}}{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)} - \arg e^{i\theta} = \arg \frac{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\, e^{-2i\theta}}{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)} =$$
$$\arg\{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\, e^{-2i\theta}\} - \arg\{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\},$$

cioè $\arg\{f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\, e^{-2i\theta}\}$ non dipende da θ. Ciò è possibile solo se $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ (se $f_{\overline{z}}(z_0) \neq 0$, al variare di θ, $f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\, e^{-2i\theta}$ descrive una circonferenza), cioè se f è olomorfa; infine, si avrà che $f' = f_z \neq 0$ in A. □

Il fatto che gli zeri di una funzione olomorfa siano isolati ed i teoremi di convergenza dimostrati nel paragrafo precedente sono sintomi di una certa rigidità delle funzioni olomorfe. In questo paragrafo, dimostreremo 3 risultati che confermano questa proprietà: il *Teorema di Liouville*, il *Principio di Massimo Modulo* ed il *Lemma di Schwarz*. Essi ci informano anche su alcune proprietà dell'immagine $f(A)$ della trasformazione f.

7.9.2. Il teorema di Liouville. Un'altra conseguenza delle disuguaglianza di Cauchy è una caratterizzazione dei polinomi.

Teorema 7.9.2. *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera. Se esistono un intero $n \geq 0$ e due numeri R ed M tali che*

$$|f(z)| \leq M|z|^n \quad \textit{per ogni} \quad |z| > R,$$

allora f è un polinomio di grado al più n.

Dimostrazione. Essendo f intera, essa ha lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

che vale per ogni $z \in \mathbb{C}$ e si ha che $a_k = f^{(k)}(0)/k!$. La (7.29) allora implica che

$$0 \leq |a_k| \leq \frac{1}{r^k} \max_{\mathbb{D}(0,r)} |f| \leq \frac{Mr^n}{r^k},$$

se $r > R$.

Quindi, se $k > n$, l'ultimo termine nella disuguaglianza è infinitesimo per $r \to \infty$ e questo vuol dire che $a_k = 0$ per ogni $k \geq n + 1$. □

Corollario 7.9.3 (Teorema di Liouville)**.** *Ogni funzione intera (definitivamente) limitata è costante.*

Conseguenza del Teorema di Liouville è il Teorema Fondamentale dell'Algebra.

Teorema 7.9.4. *Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ha almeno una radice complessa.*

Dimostrazione. Sia $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ un polinomio; essendo $p(z)$ non costante, allora $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Se $p(z)$ non avesse radici in $\mathbb{C}$, allora la funzione $1/p(z)$ sarebbe intera. Inoltre, dato che

$$(7.31)\quad |p(z)| = \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big| \geq |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| = |z|^n \Big\{ |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^{k-n} \Big\},$$

esisterebbe $R > 1$ tale che $|p(z)| \geq |a_n|/2$ per $|z| > R$. La funzione $1/p(z)$ sarebbe quindi (definitivamente) limitata e quindi costante per il Corollario 7.9.3. Anche $p(z)$ sarebbe costante, contro l'ipotesi. □

Una funzione intera che non sia un polinomio si dice *trascendente*. A differenza dei polinomi, le funzioni trascendenti possono non avere radici complesse, come la funzione esponenziale, oppure un numero finito di radici (basta moltiplicare la funzione esponenziale per un polinomio), oppure ancora averne infinite, come le funzioni seno e coseno.

Il seguente teorema ci informa sulla topologia dell'immagine di una funzione intera.

Teorema 7.9.5. *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera non costante. Allora valgono le seguenti proprietà che si escludono a vicenda:*

(i) f è un polinomio e per ogni compatto $K \subset \mathbb{C}$ esiste un disco $\mathbb{D}$ tale che $f(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cap K = \varnothing$;

(ii) f è trascendente e, per ogni $w \in \mathbb{C}$ esiste una successione di punti $z_n \in \mathbb{C}$ tale che $|z_n| \to \infty$ e $f(z_n) \to w$ per $n \to \infty$.

Dimostrazione. Essendo f intera, essa ha lo sviluppo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

che vale per ogni $z \in \mathbb{C}$. Se solo un numero finito dei coefficienti è non nullo, allora $f(z)$ è un polinomio ed, essendo non costante, abbiamo che $|f(z)| \to \infty$ per $|z| \to \infty$, per la (7.31). Ciò implica che per ogni compatto $K \subset \mathbb{C}$ esiste un disco $\mathbb{D}$ (di raggio $R = \max_{z \in K} |z|$) tale che $f(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cap K = \varnothing$.

Altrimenti, $f(z)$ ha un numero infinito di coefficienti non nulli e quindi è trascendente. Consideriamo allora la funzione

$$g(\zeta) = f(1/\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{-k},$$

che sarà olomorfa in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e con una singolarità essenziale in 0. Per il Teorema 7.6.10, ogni intorno di 0 ha immagine secondo g densa in $\mathbb{C}$, cioè per ogni $w \in \mathbb{C}$ esiste una successione di punti ζ_n tali che $\zeta_n \to 0$ e

$g(\zeta_n) \to w$ per $n \to \infty$. La successione di punti $z_n = 1/\zeta_n$ è quella richiesta in (ii). □

7.9.3. Il principio del massimo modulo. Un risultato di grande importanza nello studio della teoria geometrica delle funzioni olomorfe è il seguente *Principio del Massimo Modulo.*

Teorema 7.9.6. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*

(i) Se A è connesso e $|f|$ ha un massimo locale in A, allora f è costante.

(ii) Se A è limitato e $f \in C^0(\overline{A})$, allora

$$\max_{\overline{A}} |f| = \max_{\partial A} |f|.$$

Dimostrazione. (i) Siano

$$M = \sup_A |f|, \qquad \Omega = \{z \in A : |f(z)| = M\}$$

e $z_0 \in A$ un punto di massimo locale per $|f|$. È chiaro che Ω è non vuoto, perché $z_0 \in \Omega$, e chiuso, essendo la retro-immagine del chiuso $\{M\}$ mediante la funzione continua $|f|$. Mostriamo ora che Ω è anche aperto, ottenendo così che $\Omega = A$, essendo A connesso.

Sia allora $z \in \Omega$ e $\mathbb{D}(z, \rho)$ con chiusura contenuta in A. Se poniamo $\mathbb{D} = \mathbb{D}(z, r)$ con $0 \le r \le \rho$, per il Teorema 7.4.10, abbiamo che

$$M = |f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\theta})\, ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} \, d\theta \right| =$$
$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) \, d\theta \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| \, d\theta \le M.$$

Ciò significa che

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})| \, d\theta = M;$$

dato che $|f(z + re^{i\theta})| \le M$, otteniamo allora che $|f(z + re^{i\theta})| = M$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, ed questo per ogni $0 \le r \le \rho$. Dunque $\mathbb{D}(z, \rho) \subset \Omega$, cioè Ω è aperto.

Infine, essendo ora $\Omega = A$, abbiamo che $|f|^2 \equiv M^2$ su A. Derivando questa equazione, abbiamo che $\overline{f} f' = 0$ per ogni $z \in A$, ossia $f' \equiv 0$ dato che $f \neq 0$. Pertanto f è costante su A.

(ii) I due massimi in questione esistono perché $|f|$ è continua sui compatti $\overline{A}$ e ∂A. Se il primo massimo, indichiamolo con M, fosse assunto in un punto z_0 interno ad A, allora f sarebbe costante e $|f| \equiv M$ sulla componente connessa A' di A contenente z_0 e quindi, comunque, M verrebbe assunto su $\partial A' \subset \partial A$. □

Per le funzioni olomorfe vale anche il seguente *Principio del Minimo Modulo.*

Corollario 7.9.7. *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.*

(i) Se A è connesso e $|f|$ ha un minimo locale in $z_0 \in A$, allora o $f(z_0) = 0$ oppure f è costante.

(ii) Se A è limitato e $f \in C^0(\overline{A})$, allora o f ha zeri in A oppure

$$\min_{\overline{A}} |f| = \min_{\partial A} |f|.$$

(iii) Se esiste un disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ con chiusura contenuta in A tale che

$$|f(z_0)| < \min_{\partial \mathbb{D}(z_0,r)} |f|,$$

allora f si annulla in qualche punto di $\mathbb{D}(z_0, r)$.

Dimostrazione. (i) Se $f(z_0) \neq 0$, allora a funzione $1/f$ è olomorfa in un intorno di z_0 ed il suo modulo ha un massimo locale in z_0. Per il Teorema 7.9.6, $1/f$ e quindi f è costante.

(ii) Si procede come nel punto (ii) del Teorema 7.9.6.

(iii) Se f non si annullasse, allora la (ii) implica che

$$\min_{\mathbb{D}(z_0,r)} |f| = \min_{\partial \mathbb{D}(z_0,r)} |f| > |f(z_0)| \geq \min_{\mathbb{D}(z_0,r)} |f|,$$

che è assurdo. □

Il Principio di Massimo Modulo e i suoi corollari hanno la seguente importante conseguenza di carattere topologico.

Teorema 7.9.8 (dell'Applicazione Aperta)**.** *Siano $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso ed $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Allora $f(A)$ è aperto.*

Dimostrazione. Sia $w_0 = f(z_0) \in f(A)$; la funzione olomorfa $f(z) - w_0$ ha allora uno zero in z_0, che deve quindi essere isolato e cioè esiste un disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ con chiusura contenuta in A in cui $f(z) - w_0$ si annulla solo per $z = z_0$. Per ogni w tale che

$$|w - w_0| < \frac{1}{2} \min_{\partial \mathbb{D}(z_0,r)} |f - w_0| \tag{7.32}$$

abbiamo allora che

$$\min_{\partial \mathbb{D}(z_0,r)} |f - w| \geq \min_{\partial \mathbb{D}(z_0,r)} |f - w_0| - |w_0 - w| > |w_0 - w| = |f(z_0) - w|.$$

Per la (iii) del Corollario 7.9.7, allora $f(z) - w$ si deve annullare in $\mathbb{D}(z_0, r)$; ciò vuol dire che il disco definito da (7.32) è contenuto in $f(A)$. Abbiamo pertanto dimostrato che $f(A)$ è aperto. □

Concludiamo il capitolo con un ulteriore risultato che si rivela utile nello studio dell'applicazione conforme f.

Teorema 7.9.9 (Lemma di Schwarz)**.** *Sia $\mathbb{D}$ il disco unitario centrato nell'origine e sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$.*

Allora

$$|f(z)| \leq |z| \quad \textit{per ogni} \quad z \in \mathbb{D}$$

ed $|f'(0)| \leq 1$.

Se inoltre vale il segno di uguaglianza in una delle due disuguaglianze (nella prima, per qualche $z_0 \neq 0$), allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(z) = e^{ic} z$.

Dimostrazione. La funzione $f(z)/z$ è limitata; esiste quindi h olomorfa su $\mathbb{D}$ tale che $f(z) = z\, h(z)$ per $z \in \mathbb{D}$. Dato che h è continua su ogni $\overline{\mathbb{D}(0, r)} \subset \mathbb{D}$, per il Teorema 7.9.6, allora si ha che

$$|h(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \max_{z \in \partial \mathbb{D}(0,r)} \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{1}{r} \max_{\partial \mathbb{D}(0,r)} |f| \leq \frac{1}{r},$$

per ogni $z \in \mathbb{D}$ fissato e $|z| < r < 1$. Passando al limite per $r \to 1$, si ottiene che $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$ fissato. Inoltre,

$$|f'(0)| = \left| \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} \right| = \lim_{z \to 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1.$$

Se esiste $z_0 \in \mathbb{D}$ tale che $|f(z_0)| = |z_0|$, allora $|h(z_0)| = 1$ mentre, se $|f'(0)| = 1$, allora $|h(0)| = |f'(0)| = 1$. In entrambi i casi, $|h|$ ha un massimo interno e dunque h è una costante (unitaria). □

Un'applicazione interessante del Lemma di Schwarz è la caraterizzazione degli automorfismi del disco unitario. Sia $A \subset \mathbb{C}$; un *automorfismo di A* è un'applicazione biiettiva $f : A \to A$ olomorfa e con inversa olomorfa. L'insieme degli automorfismi di A sarà indicato con $\mathrm{Aut}(A)$; con l'operazione di composizione esso è un gruppo.

Teorema 7.9.10. *Si ha che $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ se e solo se esistono $z_0 \in \mathbb{D}$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\varphi(z) = e^{ic} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Dimostrazione. (i) Si osservi che la φ data dalla formula è olomorfa e non costante nel disco di raggio $1/|z_0| > 1$ concentrico con $\mathbb{D}$ ed inoltre, dato che se $z \in \partial\mathbb{D}$ allora $z\overline{z} = 1$, abbiamo che

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} \right| = \left| \frac{z - z_0}{z\overline{z} - \overline{z}_0 z} \right| = \frac{1}{|z|} \left| \frac{z - z_0}{\overline{z} - \overline{z}_0} \right| = 1.$$

Per il Principio di Massimo Modulo allora $|\varphi(z)| < 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}$. Una semplice verifica mostra che φ è biiettiva con inversa data da

$$\varphi^{-1}(z) = e^{-ic}\,\frac{z + z_0}{1 + \overline{z}_0 z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

e, dato che $-z_0 \in \mathbb{D}$, anche $|\varphi^{-1}(z)| < 1$ per $z \in \mathbb{D}$.

(ii) Sia ora $\varphi \in \mathbb{D}$ e supponiamo che $\varphi(0) = w_0$. Poniamo

$$\varphi_0(z) = \frac{z - w_0}{1 - \overline{w}_0 z}, \quad z \in \mathbb{D};$$

avremo che $\psi = \varphi_0 \circ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, dato che $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ è un gruppo; inoltre $\psi(0) = 0$. Per il Lemma di Schwarz (Teorema 7.9.9) allora $|\psi(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in \mathbb{D}$ e, allo stesso modo, $|\psi^{-1}(w)| \leq |w|$ per ogni $w \in \mathbb{D}$. Pertanto, preso $z \in \mathbb{D}$, abbiamo che $|z| = |\psi^{-1}(\psi(z))| \leq |\psi(z)| \leq |z|$ e cioè che $|\psi(z)| = |z|$. Per il Lemma di Schwarz allora deve esistere $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi_0 \circ \varphi(z) = \psi(z) = e^{ic} z$$

e quindi tale che

$$\varphi(z) = \varphi_0^{-1}(e^{ic} z) = \frac{e^{ic} z + w_0}{1 + \overline{w}_0 e^{ic} z} = e^{ic}\,\frac{z + e^{-ic} w_0}{1 + \overline{w_0 e^{-ic}} z},$$

per ogni $z \in \mathbb{D}$. La tesi segue dunque ponendo $z_0 = -e^{-ic} w_0$. □

Esercizi

1. Descrivere le immagini delle circonferenze di raggio r centrate nell'origine mediante la funzione $f(z) = (z + 1/z)/2$.
2. Dimostrare che ogni applicazione $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che sia $\mathbb{C}$-lineare è anche $\mathbb{R}$-lineare. Con un esempio mostrare che non vale il viceversa.
3. Sia w una radice n-sima (complessa) dell'unità. Calcolare la somma $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}$.
4. Stabilire per quali numeri reali a, b, c il polinomio $ax^2 + 2bxy + cy^2$ è la parte reale o immaginaria di un polinomio della variabile $z = x + iy$.
5. Dimostrare che se f ha valori reali ed ammette derivata complessa in ogni punto di un aperto connesso, allora f è costante.
6. Sia $f = u + iv$ olomorfa e di classe C^2. Dimostrare che u e v sono armoniche e cioè che $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$.
7. Sia u armonica. Dimostrare che u è localmente la parte reale di una funzione olomorfa.
8. Sia u armonica. Dimostrare che $f = u_x - iu_y$ è olomorfa.

9. Sia $f : A \to B$ una funzione olomorfa di classe C^2 con $f' \neq 0$. Dimostrare che una funzione $u : B \to \mathbb{R}$ di classe C^2 è armonica se e solo se lo è la funzione $u \circ f : A \to \mathbb{R}$.
10. Per $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$ dimostrare la formula:
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(2kz) = \frac{\sin(2n+1)z}{2\sin z}.$$
11. Dimostrare che la serie
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, z^n$$
converge uniformemente sui compatti contenuti nel disco unitario e calcolarne la somma.
12. Sia f olomorfa in un aperto contenente il disco unitario chiuso $\overline{\mathbb{D}}$. Calcolare
$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$
per $z \notin \overline{\mathbb{D}}$.
13. Calcolare gli zeri della funzione $e^{1/z} - 1$.
14. Dimostrare che non esiste una funzione olomorfa f nel disco unitario tale che $f(1/n) = 1/n = f(-1/n)$ per ogni $n \geq 2$.
15. Sia $+\gamma$ la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 percorsa nel senso anti-orario. Calcolare gli integrali:
$$(a)\ \int_{+\gamma} \tan z\, dz; \qquad (b)\ \int_{+\gamma} \frac{dz}{\sinh z}.$$
16. Verificare che
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = \frac{5}{6}\,\pi,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^2}\, dx = \frac{3\sqrt{2}}{8}\,\pi.$$
17. Verificare che
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{per} \quad a > b > 0;$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2 + \cos\theta}\, d\theta = 2\pi\,(1 - 2/\sqrt{3}).$$

18. Calcolare gli integrali
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\,dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^4+1}\,dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\,dx.$$
19. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$
(*Suggerimento:* Usare la curva chiusa e opportunamente orientata costituita dall'arco descritto da $re^{i\theta}$ per $0 \leq \theta \leq 2\pi/3$ e dai due raggi che collegano l'origine alle estremità dell'arco.)
20. Siano f, g funzioni intere. Dimostrare che $f(z)^2 + g(z)^2 \equiv 1$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ se e solo se esiste una funzione intera $h(z)$ tale che $f(z) = \cos h(z)$ e $g = \sin h(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.
21. (Teorema di Vitali). Sia $A \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e sia data una successione di funzioni f_n olomorfe in A, equilimitata su ogni compatto contenuto in A. Sia inoltre $E \subset A$ un insieme con un punto di accumulazione su cui la successione converge. Dimostrare che la successione converge uniformemente sui compatti di A.
22. Sia $u(x, y)$ la parte reale di una funzione olomorfa in un aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$. Dimostrare che se u ha una massimo o un minimo interno ad A allora essa è costante.
23. Una funzione intera con parte reale positiva è costante.

Bibliografia

[Br] H. Brezis, Analisi Funzionale. Liguori Editore, Napoli, 1986.

[CBV] R.V. Churchill, J.W. Brown, R.F. Verhey, Complex Variables and Applications. Third edition, McGraw-Hill, London 1974.

[DiB] E. Di Benedetto, Real Analysis. Birkhäuser, Boston, 2002.

[Fa] K.J. Falconer, The Geometry of Fractal Sets. John Wiley & Sons, Cambridge 1986.

[LL] E.H. Lieb, M. Loss, Analysis. Second edition, AMS, Providence, RI (USA), 2001.

[MP] R. Magnanini, G. Poggesi, *Littlewood's fourth principle,* preprint (2014), pubblicato su arxiv.org/abs/1408.0920.

[Ma] A.I. Markushevich, Theory of Functions of a Complex Variable. Second edition, Chelsea Publishing Company, New York 1985.

[Pa] G. Patrizio, Note di Variabile Complessa. Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Firenze, http://web.math.unifi.it/users/patrizio/DidaI/.

[Pu] C. Pucci, Istituzioni di Analisi Superiore. Pitagora Editrice, Bologna 2013, pp. 340, ISBN 978-88-96336-11-3.

[Ru] W. Rudin, Analisi Reale e Complessa. Boringhieri, Torino 1974.

Indice analitico