Misura e dimensione di Hausdorff

La misura di Hausdorff

Si ricordano alcune definizioni e teoremi dal corso di Analisi Superiore per la cui dimostrazione si rimanda alle dispense.

Definizione 1. Una famiglia di insiemi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è detta *σ-algebra* se vale:

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$
2. se $E \in \mathcal{M}$ allora $E^c \in \mathcal{M}$
3. se $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ allora $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$

Definizione 2. Una funzione $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ dove $\mathcal{M}$ è una σ-algebra è detta *misura* se:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ per ogni successione di insiemi tali che $\{E_k\} \subseteq \mathcal{M}$ e $E_j \cap E_k = \emptyset$ per $i \neq j$

Un metodo abbastanza comune di costruire misure è quello di partire da una funzione definita su tutte le parti di X con certe proprietà che ci interessano e poi restringerla alla classe di insiemi su cui si comporta "bene".

Definizione 3. Una funzione $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ è detta *misura esterna* se:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(E) \leq \mu(F)$ se $E \subseteq F$
3. $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

Teorema 4 (Primo teorema di Caratheodory)**.** *Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ una misura esterna e detta $\mathcal{M} = \{E \subseteq X \mid \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)\ \forall\, A \subseteq X\}$ allora vale che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra detta dei misurabili e μ ristretta a $\mathcal{M}$ è una misura.*

Il primo teorema di Caratheodory ci garantisce che esiste sempre un σ-algebra su cui una misura esterna risulta essere una misura, purtroppo può accadere che questa sia molto povera. Il seguente teorema ci da un utile criterio per stabilire quando questa σ-algebra risulti essere abbastanza ricca.

Teorema 5 (Secondo teorema di Caratheodoy)**.** *Sia μ una misura esterna su uno spazio metrico (X, d), se μ è* additiva sui distanti *ossia se per ogni coppia di insiemi tali che $d(A, B)$*[1] *> 0 vale*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

allora i boreliani[2] *di X sono misurabili.*

[1] Con $d(A, B)$ si intende $\inf\{d(x, y) \mid x \in A\ y \in B\}$

[2] Si ricorda che la σ-algebra di Borel è la σ-algebra generata dagli aperti di X

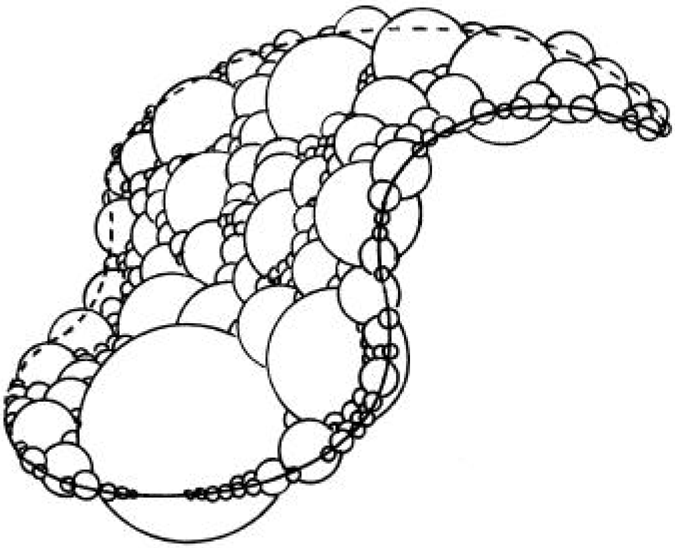

Figura 1: Delle pallette che aprossimano bene la superficie S

Veniamo ora ad applicare la precedente costruzione teorica in modo da ottenere una misura con proprietà geometricamente rilevanti. Non è difficile vedere che oggetti come curve e superfici hanno misura di Lebesgue nulla; il nostro obbiettivo è quello di costruire una misura che generalizzi il concetto di area (o di lunghezza) ma che coincida con essa su insiemi "ragionevoli".

Intuitivamente possiamo riassumere la costruzione in questo modo: supponendo di volere trovare la lunghezza di una curva γ in $\mathbb{R}^3$ possiamo ricoprirla con delle pallette $\gamma \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$ e pensare che la lunghezza della curva sia circa $l[\gamma] \sim \sum_{i=1}^{n} 2r_i$, analogamente possiamo pensare che se siamo stati "bravi" a ricoprire con pallette una superficie S la sua area sia $A(S) \sim \sum_{i=1}^{n} \pi r_i^2$.

Definizione 6. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ si definisce:

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam} E_i}{2}\right)^s \mid E \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} E_i \ \operatorname{diam}(E_i) \leq \delta\}$$

dove:

$$\omega_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

e $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ è la funzione di Eulero[3].

[3]Se n è un intero positivo ω_n coincide con il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$

Osserviamo che se $\delta \leq \delta'$ allora $\mathcal{H}^s_\delta(E) \geq \mathcal{H}^s_{\delta'}(E)$ perché si sta facendo un estremo inferiore su una classe più ristretta di oggetti, è quindi una buona definzione:

Definizione 7. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si definsce *misura di Hausdorff s-dimensionale*:

$$\mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

Vale allora la seguente proposizione:

Proposizione 8. *$\mathcal{H}^s$ è una misura esterna additiva sui distanti*

Pertanto i teoremi di Caratheodory ci garantiscono che ogni boreliano è $\mathcal{H}^s$-misurabile.

Veniamo ora a elencare alcune proprietà della misura di Hausdorff:

Proposizione 9. *Se M è una varietà k-dimensionale di $\mathbb{R}^n$ allora M è $\mathcal{H}^k$-misurabile e $\mathcal{H}^k(M)$ è uguale alla superficie di M definita mediante parametrizzazioni.*

In particolare:

- *se $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ è una curva allora:*

$$\mathcal{H}^1(\gamma([0,1])) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt$$

- *se $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è una superficie con prima forma fondamentale E, F, G:*

$$\mathcal{H}^2(X(U)) = \iint_U \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

Inoltre se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{L}^n(E)$ dove $\mathcal{L}^n(E)$ è la misura di Lebesgue.

Proposizione 10. *Sia E $\mathcal{H}^s$-misurabile*

1. *Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una funzione L-lipschitziana* [4] *allora:*

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq L^s \mathcal{H}^s(E)$$

2. *Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una funzione α-holderiana* [5] *allora:*

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(E)) \leq C^{\frac{s}{\alpha}} \frac{\omega_{\frac{s}{\alpha}}}{2^{\frac{s}{\alpha}}} \frac{2^s}{\omega_s} \mathcal{H}^s(E)$$

3. *$\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$*

4. *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un isometria allora $\mathcal{H}^s(T(E)) = \mathcal{H}^s(E)$*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima affermazione, per la seconda si procede analogamente (stando attenti ad aggiustare le costanti..), sia $\varepsilon > 0$ e $\{E_i\}$ un ricoprimento di E tale che:

[4] Ossia tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

[5] Ossia tale che $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$

1. $\mathrm{diam}(E_i) \leq \delta$
2. $\mathcal{H}^s_\delta(E) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}\, E_i}{2}\right)^s$

allora siccome

$\mathrm{diam}(f(E_i)) = \sup\{|f(x)-f(y)| \text{ t.c. } x, y \in E_i\} \leq L \sup\{|x-y| \text{ t.c. } x, y \in E_i\} = L\, \mathrm{diam}(E_i)$

e $\{f(E_i)\}$ è un ricoprimento di $f(E)$ si ha:

$$\mathcal{H}^s_{L\delta}(f(E)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}\, f(E_i)}{2}\right)^s \leq L^s \sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}\, E_i}{2}\right)^s \leq L^s \left(\mathcal{H}^s_\delta(E) + \varepsilon\right)$$

da cui al limte per $\delta \to 0^+$ e per $\varepsilon \to 0^+$ la tesi.

Veniamo ora a dimostrare le ultime due affermazioni; la funzione $f(x) = \lambda x$ è λ-lipschitziana e pertanto:

$$\mathcal{H}^s(\lambda E) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(E) = \lambda^s \mathcal{H}^s\left(\frac{\lambda E}{\lambda}\right) \leq \frac{\lambda^s}{\lambda^s}\mathcal{H}^s(\lambda E).$$

Analogamente se T è un'isometria allora $|T(x) - T(y)| = |x - y|$ quindi sia T che T^{-1} sono funzioni 1-lipschitziane e quindi:

$$\mathcal{H}^s(T(E)) \leq \mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(T^{-1}(T(E))) \leq \mathcal{H}^s(T(E)).$$

□

Gli ultimi due punti della proposizione precedente ci assicurano che la misura di Hausdorff ha le proprietà di riscalamento e di invarianza per isometrie che ci aspettiamo da una misura "geometrica".

Dimensione di Hausdorff e frattali

Nella sezione precedente abbiamo costruito la misura di Hausdorff s-dimensionale con $s \in \mathbb{R}$ pensando peró ad s come un numero intero; che signaficato possiamo dare alla precedente costruzione se s è un reale qualunque?

La seguente proposizione ci illustra ciò:

Proposizione 11. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{H}^s$-misurabile allora:*

1. *se $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ allora $\mathcal{H}^t(E) = 0$ se $t > s$*
2. *se $\mathcal{H}^s(E) > 0$ allora $\mathcal{H}^t(E) = \infty$ se $t < s$*

Dimostrazione. Basta dimostrare la prima affermazione la seconda infatti segue poi ragionando per assurdo. Consideriamo un ricoprimento $\{E_i\}$ di E tale che

1. $\mathrm{diam}(E_i) \leq \delta$
2. $\mathcal{H}^s_\delta(E) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}\, E_i}{2}\right)^s$

allora:

$$\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \omega_t \left(\frac{\mathrm{diam}\, E_i}{2}\right)^t \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}\, E_i}{2}\right)^s \left(\frac{\mathrm{diam}\, E_i}{2}\right)^{t-s} \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} (\mathcal{H}^s_\delta + \varepsilon)$$

Da cui la tesi per $\delta \to 0^+$. □

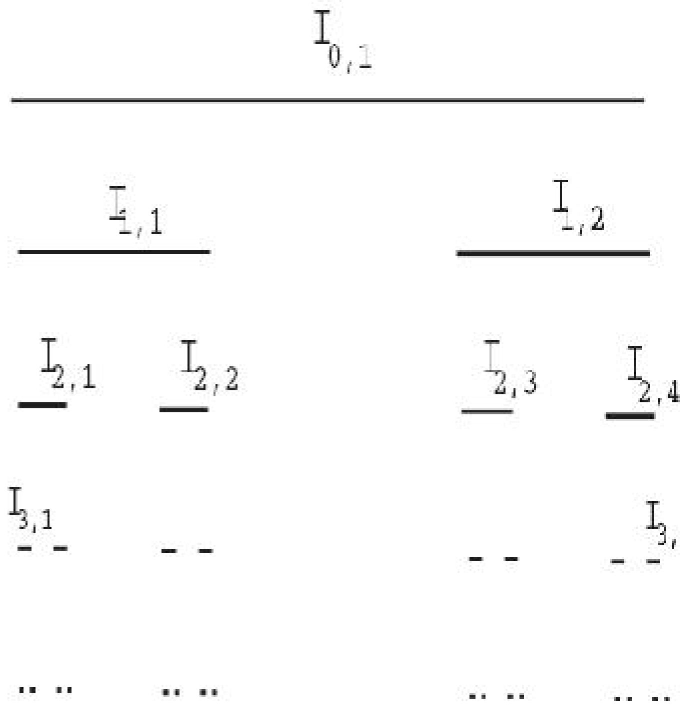

Figura 2: L'insieme di Cantor

La precedente proposizione ci permette di dare la seguente definizione:

Definizione 12. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si definisce *dimensione di Hausdorff* di E:

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \sup\{s \mid \mathcal{H}^s(E) = \infty\} = \inf\{t \mid \mathcal{H}^t(E) = 0\}$$

Non è detto che per $s = \dim_{\mathcal{H}}(E)$ risulti $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ (basta pensare ad una retta), nel caso in cui questo avviene è però possibile capire quale debba essere la dimensione di Hausdorff di alcuni insiemi molto facilmente.

L'insieme di Cantor

Sia C l'insieme di Cantor, ricordando che $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{j,k}$, possiamo considerare:

$$C_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_{j,k} = C \cap [0, \frac{1}{3}]$$

$$C_2 = C \setminus C_1 = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$$

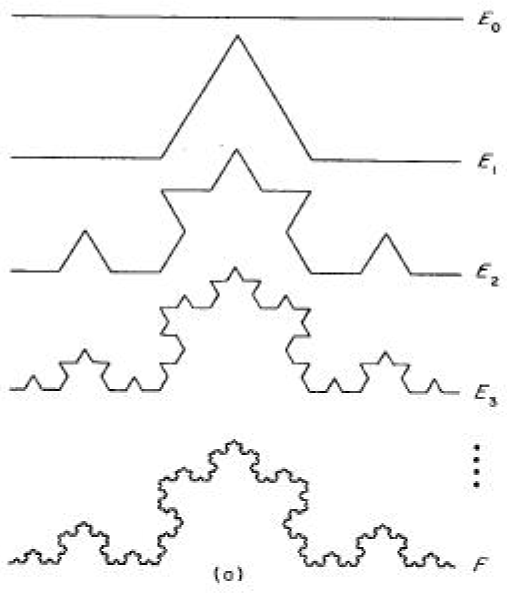

Figura 3: Il fiocco di neve id Van Koch

allora si ha $\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_1)+\mathcal{H}^s(C_2) = \mathcal{H}^s(C_1)+\mathcal{H}^s(C_1+\frac{1}{3}) = 2\mathcal{H}^s(C_1)$ d'altra parte si verifica facilmente che $C = \mathcal{H}^s(3C_1)$ e quindi $2\mathcal{H}^s(C_1) = 3^s\mathcal{H}^s(C_1)$ supponendo $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$ (si può dimostrare rigorosamente si veda [1]) e semplificando otteniamo $s = \dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Il fiocco di neve di Van Koch

Facciamo ora un esempio di un sottoinsieme del piano con dimensione strettamente compresa tra uno e due. Sia infatti K la curva di Van Koch che si otiene partendo da un segmento unitario, al primo passo si sostituisce al segmento $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ un trianolo equilatero poi si iriapplica la costruzione precedente ad ognuno dei quattro segmenti ottenuti e così via (vedi figura). ALlora, detto K_1 il primo pezzettino, si ha che K è l'unione di quattro copie isometriche di K_1 e contemporaneamente $K = 3K_1$ per cui:

$$4\mathcal{H}^s(K_1) = \mathcal{H}^s(3K_1) = 3^s\mathcal{H}^s(K_1)$$

da cui, sempre supponendo di poter semplificare, $s = \dim_{\mathcal{H}}(K) = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

Riferimenti bibliografici

[1] K. Falconer, Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications,Wiley and Sons,1990

[2] G. Folland, Real Analysis Modern techniques and their applications, 2nd edition, Wiley-Interscience, New york, 1999

[3] R. Magnanini, Dispense per il corso Istituzioni di Analisi Superiore 1