

Hot spots e simmetria

Rolando Magnanini

Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini"
Università di Firenze

Firenze, 27 gennaio 2007

- 1 Prime proprietà dell'hot spot
 - Comportamento per tempi grandi
 - Comportamento per tempi piccoli
- 2 Hot spot stazionario
 - Condizioni sufficienti
 - Alla caccia dell'hot spot
 - Condizioni necessarie
 - Hot spot in un poligono: simmetrie
- 3 Problemi aperti

- 1 Prime proprietà dell'hot spot
 - Comportamento per tempi grandi
 - Comportamento per tempi piccoli
- 2 Hot spot stazionario
 - Condizioni sufficienti
 - Alla caccia dell'hot spot
 - Condizioni necessarie
 - Hot spot in un poligono: simmetrie
- 3 Problemi aperti

- 1 Prime proprietà dell'hot spot
 - Comportamento per tempi grandi
 - Comportamento per tempi piccoli
- 2 Hot spot stazionario
 - Condizioni sufficienti
 - Alla caccia dell'hot spot
 - Condizioni necessarie
 - Hot spot in un poligono: simmetrie
- 3 Problemi aperti

- R. Magnanini-S. Sakaguchi, *On heat conductors with a stationary hot spot*, Annali Matematica Pura ed Applicata 183, no. 1 (2004), 1-23.
- R. Magnanini-S. Sakaguchi, *Polygonal heat conductors with a stationary hot spot*, submitted (2006).

Problema al contorno

Sia $u = u(x, t)$ soluzione del problema:

$$\partial_t u = \Delta u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty),$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è limitato ed $f \in L^\infty(\Omega)$.

Definizione degli insiemi $M(t)$ e $C(t)$

Fissiamo $t > 0$ e definiamo:

$$M(t) = \{x \in \Omega : u(x, t) = \max_{y \in \bar{\Omega}} u(y, t)\},$$

$$C(t) = \{x \in \Omega : \nabla u(x, t) = 0\}.$$

È chiaro che $M(t) \subseteq C(t)$ per ogni $t > 0$.

Rappresentazione spettrale di $u(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e^{-\lambda_n t} u_n(x),$$

dove

- 1 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale (completo in $L^2(\Omega)$) di autofunzioni di Dirichlet per $-\Delta$;
- 2 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$; sono i relativi autovalori
- 3 $\hat{f}_n = (f, u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Brascamp-Lieb (1976), Korevaar (1983),
Korevaar-Lewis (1987)

Ω convesso $\Rightarrow \log u_1$ strettamente concava.

Problema al contorno

Sia $u = u(x, t)$ soluzione del problema:

$$\partial_t u = \Delta u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty),$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è limitato ed $f \in L^\infty(\Omega)$.

Definizione degli insiemi $M(t)$ e $C(t)$

Fissiamo $t > 0$ e definiamo:

$$M(t) = \{x \in \Omega : u(x, t) = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y, t)\},$$

$$C(t) = \{x \in \Omega : \nabla u(x, t) = 0\}.$$

È chiaro che $M(t) \subseteq C(t)$ per ogni $t > 0$.

Rappresentazione spettrale di $u(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e^{-\lambda_n t} u_n(x),$$

dove

- 1 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale (completo in $L^2(\Omega)$) di autofunzioni di Dirichlet per $-\Delta$;
- 2 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$; sono i relativi autovalori
- 3 $\hat{f}_n = (f, u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Brascamp-Lieb (1976), Korevaar (1983),
Korevaar-Lewis (1987)

Ω convesso $\Rightarrow \log u_1$ strettamente concava.

Problema al contorno

Sia $u = u(x, t)$ soluzione del problema:

$$\partial_t u = \Delta u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty),$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è limitato ed $f \in L^\infty(\Omega)$.

Definizione degli insiemi $M(t)$ e $C(t)$

Fissiamo $t > 0$ e definiamo:

$$M(t) = \{x \in \Omega : u(x, t) = \max_{y \in \bar{\Omega}} u(y, t)\},$$

$$C(t) = \{x \in \Omega : \nabla u(x, t) = 0\}.$$

È chiaro che $M(t) \subseteq C(t)$ per ogni $t > 0$.

Rappresentazione spettrale di $u(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e^{-\lambda_n t} u_n(x),$$

dove

- 1 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale (completo in $L^2(\Omega)$) di **autofunzioni di Dirichlet** per $-\Delta$;
- 2 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$; sono i relativi autovalori
- 3 $\hat{f}_n = (f, u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Brascamp-Lieb (1976), Korevaar (1983),
Korevaar-Lewis (1987)

Ω convesso $\Rightarrow \log u_1$ strettamente concava.

Problema al contorno

Sia $u = u(x, t)$ soluzione del problema:

$$\partial_t u = \Delta u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty),$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è limitato ed $f \in L^\infty(\Omega)$.

Definizione degli insiemi $M(t)$ e $C(t)$

Fissiamo $t > 0$ e definiamo:

$$M(t) = \{x \in \Omega : u(x, t) = \max_{y \in \bar{\Omega}} u(y, t)\},$$

$$C(t) = \{x \in \Omega : \nabla u(x, t) = 0\}.$$

È chiaro che $M(t) \subseteq C(t)$ per ogni $t > 0$.

Rappresentazione spettrale di $u(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e^{-\lambda_n t} u_n(x),$$

dove

- 1 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale (completo in $L^2(\Omega)$) di **autofunzioni di Dirichlet** per $-\Delta$;
- 2 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$; sono i relativi autovalori
- 3 $\hat{f}_n = (f, u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Brascamp-Lieb (1976), Korevaar (1983),
Korevaar-Lewis (1987)

Ω **convesso** \Rightarrow $\log u_1$ strettamente concava.

Comportamento per tempi grandi

Conseguenza

Esiste unico un punto $x_\infty \in \Omega$ tale che:

$$u_1(x_\infty) = \max_{\Omega} u_1.$$

L'hot spot $x(t)$

Esistono $T > 0$ ed $x(t) \in \Omega$ tali che

- 1 $M(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t \geq T$;
- 2 $x(t) \rightarrow x_\infty$ se $t \rightarrow \infty$.

Convergenza

Questo secondo risultato segue dal fatto che

- 1 $e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t) \rightarrow \widehat{f}_1 u_1$ uniformemente in $\overline{\Omega}$
- 2 $D_x^\alpha (e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t)) \rightarrow \widehat{f}_1 D_x^\alpha u_1$, $|\alpha| \leq 2$, uniformemente in ogni compatto $C \subset \Omega$.

Se inoltre $f \equiv 1$ ($\log f$ concava)

- 1 Principio di massimo $\Rightarrow 0 < u < 1$ in $\Omega \times (0, \infty)$;
- 2 Brascamp-Lieb, Korevaar $\Rightarrow x \mapsto \log u(x, t)$ concava per ogni $t > 0$;
- 3 u analitica in $x \Rightarrow M(t) = C(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t > 0$.

Comportamento per tempi grandi

Conseguenza

Esiste unico un punto $x_\infty \in \Omega$ tale che:

$$u_1(x_\infty) = \max_{\Omega} u_1.$$

L'hot spot $x(t)$

Esistono $T > 0$ ed $x(t) \in \Omega$ tali che

- 1 $M(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t \geq T$;
- 2 $x(t) \rightarrow x_\infty$ se $t \rightarrow \infty$.

Convergenza

Questo secondo risultato segue dal fatto che

- 1 $e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t) \rightarrow \widehat{f}_1 u_1$ uniformemente in $\overline{\Omega}$
- 2 $D_x^\alpha (e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t)) \rightarrow \widehat{f}_1 D_x^\alpha u_1$, $|\alpha| \leq 2$, uniformemente in ogni compatto $C \subset \Omega$.

Se inoltre $f \equiv 1$ ($\log f$ concava)

- 1 Principio di massimo $\Rightarrow 0 < u < 1$ in $\Omega \times (0, \infty)$;
- 2 Brascamp-Lieb, Korevaar $\Rightarrow x \mapsto \log u(x, t)$ concava per ogni $t > 0$;
- 3 u analitica in $x \Rightarrow M(t) = C(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t > 0$.

Comportamento per tempi grandi

Conseguenza

Esiste unico un punto $x_\infty \in \Omega$ tale che:

$$u_1(x_\infty) = \max_{\bar{\Omega}} u_1.$$

L'hot spot $x(t)$

Esistono $T > 0$ ed $x(t) \in \Omega$ tali che

- 1 $M(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t \geq T$;
- 2 $x(t) \rightarrow x_\infty$ se $t \rightarrow \infty$.

Convergenza

Questo secondo risultato segue dal fatto che

- 1 $e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t) \rightarrow \widehat{f}_1 u_1$ uniformemente in $\bar{\Omega}$
- 2 $D_x^\alpha (e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t)) \rightarrow \widehat{f}_1 D_x^\alpha u_1$, $|\alpha| \leq 2$, uniformemente in ogni compatto $\subset \Omega$.

Se inoltre $f \equiv 1$ ($\log f$ concava)

- 1 Principio di massimo $\Rightarrow 0 < u < 1$ in $\Omega \times (0, \infty)$;
- 2 Brascamp-Lieb, Korevaar $\Rightarrow x \mapsto \log u(x, t)$ concava per ogni $t > 0$;
- 3 u analitica in $x \Rightarrow M(t) = C(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t > 0$.

Comportamento per tempi grandi

Conseguenza

Esiste unico un punto $x_\infty \in \Omega$ tale che:

$$u_1(x_\infty) = \max_{\bar{\Omega}} u_1.$$

L'hot spot $x(t)$

Esistono $T > 0$ ed $x(t) \in \Omega$ tali che

- 1 $M(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t \geq T$;
- 2 $x(t) \rightarrow x_\infty$ se $t \rightarrow \infty$.

Convergenza

Questo secondo risultato segue dal fatto che

- 1 $e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t) \rightarrow \widehat{f}_1 u_1$ uniformemente in $\bar{\Omega}$
- 2 $D_x^\alpha (e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t)) \rightarrow \widehat{f}_1 D_x^\alpha u_1$, $|\alpha| \leq 2$, uniformemente in ogni compatto $\subset \Omega$.

Se inoltre $f \equiv 1$ ($\log f$ concava)

- 1 Principio di massimo $\Rightarrow 0 < u < 1$ in $\Omega \times (0, \infty)$;
- 2 Brascamp-Lieb, Korevaar $\Rightarrow x \mapsto \log u(x, t)$ concava per ogni $t > 0$;
- 3 u analitica in $x \Rightarrow M(t) = C(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t > 0$.

Comportamento per tempi grandi

Conseguenza

Esiste unico un punto $x_\infty \in \Omega$ tale che:

$$u_1(x_\infty) = \max_{\Omega} u_1.$$

L'hot spot $x(t)$

Esistono $T > 0$ ed $x(t) \in \Omega$ tali che

- 1 $M(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t \geq T$;
- 2 $x(t) \rightarrow x_\infty$ se $t \rightarrow \infty$.

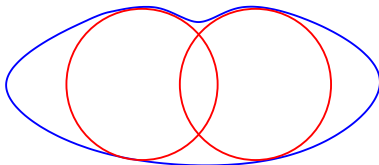
Convergenza

Questo secondo risultato segue dal fatto che

- 1 $e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t) \rightarrow \widehat{f}_1 u_1$ uniformemente in $\overline{\Omega}$
- 2 $D_x^\alpha (e^{\lambda_1 t} u(\cdot, t)) \rightarrow \widehat{f}_1 D_x^\alpha u_1$, $|\alpha| \leq 2$, uniformemente in ogni compatto $\subset \Omega$.

Se inoltre $f \equiv 1$ (log f concava)

- 1 Principio di massimo $\Rightarrow 0 < u < 1$ in $\Omega \times (0, \infty)$;
- 2 Brascamp-Lieb, Korevaar $\Rightarrow x \mapsto \log u(x, t)$ concava per ogni $t > 0$;
- 3 u analitica in $x \Rightarrow M(t) = C(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t > 0$.



Comportamento per tempi piccoli

Varadhan (1967), Freidlin-Wentzell (1984),
Evans-Ishii (1985)

Sia

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|;$$

allora

$$-4t \log\{1 - u(x, t)\} \rightarrow d(x)^2 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+,$$

uniformemente in $\bar{\Omega}$.

Conseguenza: se Ω limitato

$$\text{dist}(x(t), M_d) \rightarrow 0 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+.$$

dove

$$M_d = \{x \in \Omega : d(x) = \max_{\bar{\Omega}} d\}.$$

Ω strettamente convesso

È chiaro che in questo caso M_d contiene
un solo punto, $x_0 \in \Omega$, e quindi

$$x(t) \rightarrow x_0 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+.$$

Comportamento per tempi piccoli

Varadhan (1967), Freidlin-Wentzell (1984),
Evans-Ishii (1985)

Sia

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|;$$

allora

$$-4t \log\{1 - u(x, t)\} \rightarrow d(x)^2 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+,$$

uniformemente in $\bar{\Omega}$.

Conseguenza: se Ω limitato

$$\text{dist}(x(t), M_d) \rightarrow 0 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+.$$

dove

$$M_d = \{x \in \Omega : d(x) = \max_{\Omega} d\}.$$

Ω strettamente convesso

È chiaro che in questo caso M_d contiene
un solo punto, $x_0 \in \Omega$, e quindi

$$x(t) \rightarrow x_0 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+.$$

Comportamento per tempi piccoli

Varadhan (1967), Freidlin-Wentzell (1984),
Evans-Ishii (1985)

Sia

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|;$$

allora

$$-4t \log\{1 - u(x, t)\} \rightarrow d(x)^2 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+,$$

uniformemente in $\bar{\Omega}$.

Conseguenza: se Ω limitato

$$\text{dist}(x(t), M_d) \rightarrow 0 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+.$$

dove

$$M_d = \{x \in \Omega : d(x) = \max_{\Omega} d\}.$$

Ω strettamente convesso

È chiaro che in questo caso M_d contiene
un solo punto, $x_0 \in \Omega$, e quindi

$$x(t) \rightarrow x_0 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+.$$

Comportamento per tempi piccoli

Varadhan (1967), Freidlin-Wentzell (1984),
Evans-Ishii (1985)

Sia

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|;$$

allora

$$-4t \log\{1 - u(x, t)\} \rightarrow d(x)^2 \text{ se } t \rightarrow 0^+,$$

uniformemente in $\bar{\Omega}$.

Conseguenza: se Ω limitato

$$\text{dist}(x(t), M_d) \rightarrow 0 \text{ se } t \rightarrow 0^+.$$

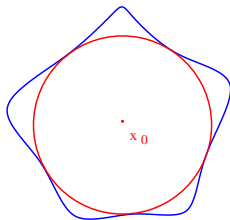
dove

$$M_d = \{x \in \Omega : d(x) = \max_{\bar{\Omega}} d\}.$$

Ω strettamente convesso

È chiaro che in questo caso M_d contiene
un solo punto, $x_0 \in \Omega$, e quindi

$$x(t) \rightarrow x_0 \text{ se } t \rightarrow 0^+.$$



Problema 1

Se M_d contiene un solo punto, si può dire
che la stessa cosa si verifica per $M(t)$?

Comportamento per tempi piccoli

Varadhan (1967), Freidlin-Wentzell (1984),
Evans-Ishii (1985)

Sia

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|;$$

allora

$$-4t \log\{1 - u(x, t)\} \rightarrow d(x)^2 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+,$$

uniformemente in $\bar{\Omega}$.

Conseguenza: se Ω limitato

$$\text{dist}(x(t), M_d) \rightarrow 0 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+.$$

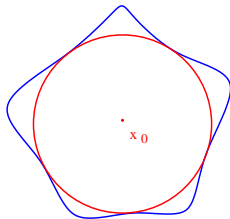
dove

$$M_d = \{x \in \Omega : d(x) = \max_{\bar{\Omega}} d\}.$$

Ω strettamente convesso

È chiaro che in questo caso M_d contiene
un solo punto, $x_0 \in \Omega$, e quindi

$$x(t) \rightarrow x_0 \quad \text{se } t \rightarrow 0^+.$$



Problema 1

Se M_d contiene un solo punto, si può dire
che la stessa cosa si verifica per $M(t)$?

Hot spot stazionario: condizioni sufficienti

Klamkin (1994)

Se Ω (anche non convesso) ha simmetria centrale rispetto ad un punto $0 \in \Omega$, allora per ogni $t > 0$

$$u(-x, t) = u(x, t)$$

↓

$$-\nabla u(-x, t) = \nabla u(x, t)$$

↓

$$\nabla u(0, t) = 0.$$

Ω convesso

$$C(t) = M(t) = \{0\} \text{ per ogni } t > 0.$$

Chamberland-Siegel (1997)

Ω convesso e invariante rispetto ad un sottogruppo G essenziale di $O(N)$, allora $C(t) = M(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$.

Definizione

$G \subset O(N)$ essenziale se, per ogni $x \in \Omega$, $x \neq 0$, esiste $g \in G$ tale che $gx \neq x$.

Dimostrazione

$$g(\Omega) = \Omega \Rightarrow u(gx, t) = u(x, t)$$

$$\Rightarrow g \nabla u(gx, t) = \nabla u(x, t) \Rightarrow$$

$$g \nabla u(0, t) = \nabla u(0, t) \text{ per ogni } g \in G;$$

$$G \text{ essenziale} \Rightarrow \nabla u(0, t) = 0.$$

Hot spot stazionario: condizioni sufficienti

Klamkin (1994)

Se Ω (anche non convesso) ha simmetria centrale rispetto ad un punto $0 \in \Omega$, allora per ogni $t > 0$

$$u(-x, t) = u(x, t)$$

\Downarrow

$$-\nabla u(-x, t) = \nabla u(x, t)$$

\Downarrow

$$\nabla u(0, t) = 0.$$

Ω convesso

$C(t) = M(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$.

Chamberland-Siegel (1997)

Ω convesso e invariante rispetto ad un sottogruppo G essenziale di $O(N)$, allora $C(t) = M(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$.

Definizione

$G \subset O(N)$ essenziale se, per ogni $x \in \Omega$, $x \neq 0$, esiste $g \in G$ tale che $gx \neq x$.

Dimostrazione

$$g(\Omega) = \Omega \Rightarrow u(gx, t) = u(x, t)$$

$$\Rightarrow g \nabla u(gx, t) = \nabla u(x, t) \Rightarrow$$

$$g \nabla u(0, t) = \nabla u(0, t) \text{ per ogni } g \in G;$$

$$G \text{ essenziale} \Rightarrow \nabla u(0, t) = 0.$$

Hot spot stazionario: condizioni sufficienti

Klamkin (1994)

Se Ω (anche non convesso) ha simmetria centrale rispetto ad un punto $0 \in \Omega$, allora per ogni $t > 0$

$$u(-x, t) = u(x, t)$$

↓

$$-\nabla u(-x, t) = \nabla u(x, t)$$

↓

$$\nabla u(0, t) = 0.$$

Ω convesso

$C(t) = M(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$.

Chamberland-Siegel (1997)

Ω convesso e invariante rispetto ad un sottogruppo G **essenziale** di $O(N)$, allora $C(t) = M(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$.

Definizione

$G \subset O(N)$ **essenziale** se, per ogni $x \in \Omega$, $x \neq 0$, esiste $g \in G$ tale che $gx \neq x$.

Dimostrazione

$$g(\Omega) = \Omega \Rightarrow u(gx, t) = u(x, t)$$

$$\Rightarrow g \nabla u(gx, t) = \nabla u(x, t) \Rightarrow$$

$$g \nabla u(0, t) = \nabla u(0, t) \text{ per ogni } g \in G;$$

$$G \text{ essenziale} \Rightarrow \nabla u(0, t) = 0.$$

Hot spot stazionario: condizioni sufficienti

Klamkin (1994)

Se Ω (anche non convesso) ha simmetria centrale rispetto ad un punto $0 \in \Omega$, allora per ogni $t > 0$

$$u(-x, t) = u(x, t)$$

↓

$$-\nabla u(-x, t) = \nabla u(x, t)$$

↓

$$\nabla u(0, t) = 0.$$

Ω convesso

$C(t) = M(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$.

Chamberland-Siegel (1997)

Ω convesso e invariante rispetto ad un sottogruppo G **essenziale** di $O(N)$, allora $C(t) = M(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$.

Definizione

$G \subset O(N)$ **essenziale** se, per ogni $x \in \Omega$, $x \neq 0$, esiste $g \in G$ tale che $gx \neq x$.

Dimostrazione

$$g(\Omega) = \Omega \Rightarrow u(gx, t) = u(x, t)$$

$$\Rightarrow g \nabla u(gx, t) = \nabla u(x, t) \Rightarrow$$

$$g \nabla u(0, t) = \nabla u(0, t) \text{ per ogni } g \in G;$$

$$G \text{ essenziale} \Rightarrow \nabla u(0, t) = 0.$$

Hot spot stazionario: condizioni sufficienti

Klamkin (1994)

Se Ω (anche non convesso) ha simmetria centrale rispetto ad un punto $0 \in \Omega$, allora per ogni $t > 0$

$$u(-x, t) = u(x, t)$$

↓

$$-\nabla u(-x, t) = \nabla u(x, t)$$

↓

$$\nabla u(0, t) = 0.$$

Ω convesso

$C(t) = M(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$.

Chamberland-Siegel (1997)

Ω convesso e invariante rispetto ad un sottogruppo G **essenziale** di $O(N)$, allora $C(t) = M(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$.

Definizione

$G \subset O(N)$ **essenziale** se, per ogni $x \in \Omega$, $x \neq 0$, esiste $g \in G$ tale che $gx \neq x$.

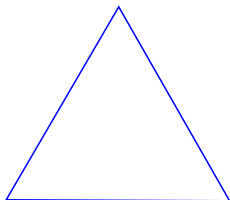
Dimostrazione

$$g(\Omega) = \Omega \Rightarrow u(gx, t) = u(x, t)$$

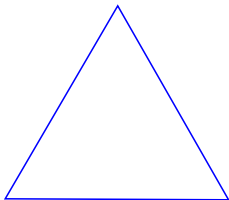
$$\Rightarrow g \nabla u(gx, t) = \nabla u(x, t) \Rightarrow$$

$$g \nabla u(0, t) = \nabla u(0, t) \text{ per ogni } g \in G;$$

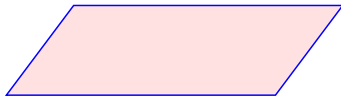
$$G \text{ essenziale} \Rightarrow \nabla u(0, t) = 0.$$



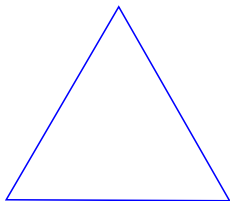
Non centrosimmetrico,
 $G = \{e^{2\pi ik/3}\}_{k=0,1,2}$.



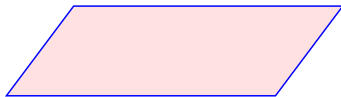
Non centrosimmetrico,
 $G = \{e^{2\pi ik/3}\}_{k=0,1,2}$.



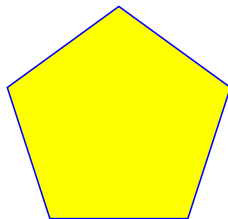
Centrosimmetrico, $G = \{1, -1\}$



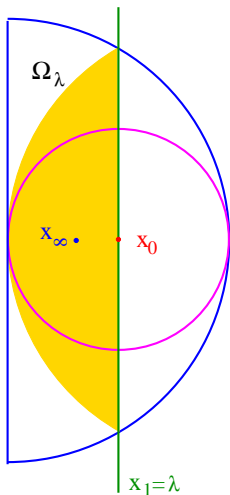
Non centrosimmetrico,
 $G = \{e^{2\pi ik/3}\}_{k=0,1,2}$.



Centrosimmetrico, $G = \{1, -1\}$



Non centrosimmetrico,
 $G = \{e^{2\pi ik/5}\}_{k=0,1,2}$.



Esempio: in generale $x(t)$ si muove

- 1 x_0 è l'unico punto di massimo per d ;
- 2 $\nabla u_1(x_0) \neq 0$ perché

$$2\partial_{x_1} u_1(x_0) = \partial_{x_1} v(x_0) = \partial_\nu v(x_0) < 0,$$

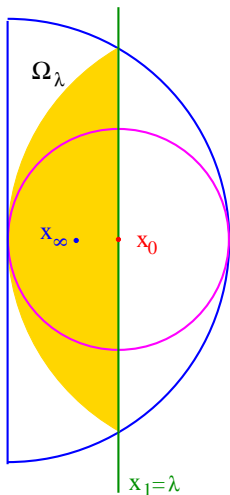
dove

$$v(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2) - u_1(2\lambda - x_1, x_2).$$

- 3 Infatti

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda_1 v &= 0 \text{ in } \Omega_\lambda, \\ v &\geq 0 \text{ su } \partial\Omega_\lambda \end{aligned}$$

e quindi $v > 0$ in Ω_λ , $v(x_0) = 0$ e dunque, per il lemma di Hopf, $\partial_\nu v(x_0) < 0$.



Esempio: in generale $x(t)$ si muove

- 1 x_0 è l'unico punto di massimo per d ;
- 2 $\nabla u_1(x_0) \neq 0$ perché

$$2\partial_{x_1} u_1(x_0) = \partial_{x_1} v(x_0) = \partial_\nu v(x_0) < 0,$$

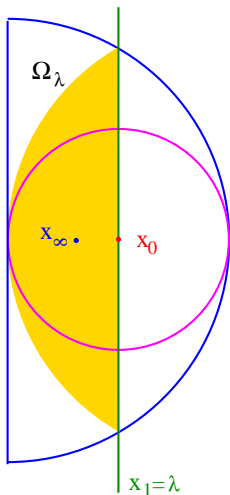
dove

$$v(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2) - u_1(2\lambda - x_1, x_2).$$

- 3 Infatti

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda_1 v &= 0 \text{ in } \Omega_\lambda, \\ v &\geq 0 \text{ su } \partial\Omega_\lambda \end{aligned}$$

e quindi $v > 0$ in Ω_λ , $v(x_0) = 0$ e dunque, per il lemma di Hopf, $\partial_\nu v(x_0) < 0$.



Esempio: in generale $x(t)$ si muove

- 1 x_0 è l'unico punto di massimo per d ;
- 2 $\nabla u_1(x_0) \neq 0$ perché

$$2\partial_{x_1} u_1(x_0) = \partial_{x_1} v(x_0) = \partial_\nu v(x_0) < 0,$$

dove

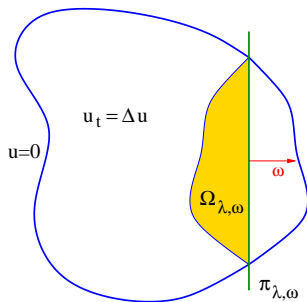
$$v(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2) - u_1(2\lambda - x_1, x_2).$$

- 3 Infatti

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda_1 v &= 0 \quad \text{in } \Omega_\lambda, \\ v &\geq 0 \quad \text{su } \partial\Omega_\lambda \end{aligned}$$

e quindi $v > 0$ in Ω_λ , $v(x_0) = 0$ e dunque, per il **lemma di Hopf**, $\partial_\nu v(x_0) < 0$.

Alla caccia dell'hot spot



Suggerimento

L'esempio precedente ci suggerisce un modo per restringere la ricerca dell'hot spot $x(t)$.

Notazioni

$$\begin{aligned}\omega &\in \mathbb{S}^{N-1}, \quad x^{\lambda, \omega} = x - 2(x \cdot \omega - \lambda)\omega, \\ \pi_\lambda &= \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega = \lambda\}, \\ v^\lambda(x, t) &= u(x, t) - u(x^\lambda, t).\end{aligned}$$

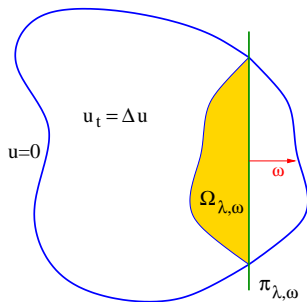
Come prima

$$\begin{aligned}v_t^\lambda &= \Delta v^\lambda \text{ in } \Omega_{\lambda, \omega} \times (0, \infty), \\ v^\lambda &= 0 \text{ su } \Omega_{\lambda, \omega} \times \{0\}, \\ v^\lambda &\geq 0 \text{ in } \partial\Omega_{\lambda, \omega} \times (0, \infty).\end{aligned}$$

Lemma di Hopf

$$\partial_\omega u < 0 \text{ su } \pi_{\lambda, \omega} \times (0, \infty).$$

Alla caccia dell'hot spot



Suggerimento

L'esempio precedente ci suggerisce un modo per restringere la ricerca dell'hot spot $x(t)$.

Notazioni

$$\begin{aligned}\omega &\in \mathbb{S}^{N-1}, \quad x^{\lambda,\omega} = x - 2(x \cdot \omega - \lambda)\omega, \\ \pi_\lambda &= \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega = \lambda\}, \\ v^\lambda(x, t) &= u(x, t) - u(x^\lambda, t).\end{aligned}$$

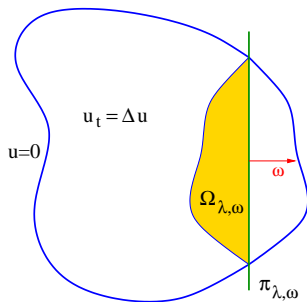
Come prima

$$\begin{aligned}v_t^\lambda &= \Delta v^\lambda \text{ in } \Omega_{\lambda,\omega} \times (0, \infty), \\ v^\lambda &= 0 \text{ su } \Omega_{\lambda,\omega} \times \{0\}, \\ v^\lambda &\geq 0 \text{ in } \partial\Omega_{\lambda,\omega} \times (0, \infty).\end{aligned}$$

Lemma di Hopf

$$\partial_\omega u < 0 \text{ su } \pi_{\lambda,\omega} \times (0, \infty).$$

Alla caccia dell'hot spot



Suggerimento

L'esempio precedente ci suggerisce un modo per restringere la ricerca dell'hot spot $x(t)$.

Notazioni

$$\begin{aligned}\omega &\in \mathbb{S}^{N-1}, \quad x^{\lambda, \omega} = x - 2(x \cdot \omega - \lambda)\omega, \\ \pi_\lambda &= \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega = \lambda\}, \\ v^\lambda(x, t) &= u(x, t) - u(x^\lambda, t).\end{aligned}$$

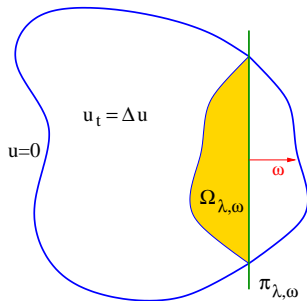
Come prima

$$\begin{aligned}v_t^\lambda &= \Delta v^\lambda \text{ in } \Omega_{\lambda, \omega} \times (0, \infty), \\ v^\lambda &= 0 \text{ su } \Omega_{\lambda, \omega} \times \{0\}, \\ v^\lambda &\geq 0 \text{ in } \partial\Omega_{\lambda, \omega} \times (0, \infty).\end{aligned}$$

Lemma di Hopf

$$\partial_\omega u < 0 \text{ su } \pi_{\lambda, \omega} \times (0, \infty).$$

Alla caccia dell'hot spot



Suggerimento

L'esempio precedente ci suggerisce un modo per restringere la ricerca dell'hot spot $x(t)$.

Notazioni

$$\begin{aligned}\omega &\in \mathbb{S}^{N-1}, \quad x^{\lambda, \omega} = x - 2(x \cdot \omega - \lambda)\omega, \\ \pi_\lambda &= \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega = \lambda\}, \\ v^\lambda(x, t) &= u(x, t) - u(x^\lambda, t).\end{aligned}$$

Come prima

$$\begin{aligned}v_t^\lambda &= \Delta v^\lambda \quad \text{in } \Omega_{\lambda, \omega} \times (0, \infty), \\ v^\lambda &= 0 \quad \text{su } \Omega_{\lambda, \omega} \times \{0\}, \\ v^\lambda &\geq 0 \quad \text{in } \partial\Omega_{\lambda, \omega} \times (0, \infty).\end{aligned}$$

Lemma di Hopf

$$\partial_\omega u < 0 \quad \text{su } \pi_{\lambda, \omega} \times (0, \infty).$$

Conclusione

Perciò, finché $\Omega_{\lambda,\omega}$ resta incluso in Ω , $\pi_{\lambda,\omega}$ non può contenere punti critici di u , cioè:

$$C(t) \subseteq \bigcap_{\substack{\Omega_{\lambda,\omega} \subset \Omega \\ \omega \in \mathbb{S}^{N-1}}} H^{\lambda,\omega},$$

dove

$$H^{\lambda,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega < \lambda\}.$$

In particolare

- 1 Se Ω è simmetrico rispetto ad un piano, $C(t)$ è contenuto in quel piano.
- 2 Se Ω è convesso ed ha N piani di simmetria **indipendenti**, allora $x(t)$ non si muove.

Ω limitato e convesso

Supponiamo che $M_d = \{0\}$ e, per ogni $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$, definiamo:

$$\lambda(\omega) = \inf\{\lambda : \Omega_{\lambda,\omega} \subset \Omega\}.$$

Abbiamo visto che

$$x(t) \in \bigcap_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega < \lambda(\omega)\}.$$

Problema 2

Calcolare (o stimare) la funzione $\lambda(\omega)$.

Conclusione

Perciò, finché $\Omega_{\lambda,\omega}$ resta incluso in Ω , $\pi_{\lambda,\omega}$ non può contenere punti critici di u , cioè:

$$C(t) \subseteq \bigcap_{\substack{\Omega_{\lambda,\omega} \subset \Omega \\ \omega \in \mathbb{S}^{N-1}}} H^{\lambda,\omega},$$

dove

$$H^{\lambda,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega < \lambda\}.$$

In particolare

- 1 Se Ω è simmetrico rispetto ad un piano, $C(t)$ è contenuto in quel piano.
- 2 Se Ω è convesso ed ha N piani di simmetria **indipendenti**, allora $x(t)$ non si muove.

Ω limitato e convesso

Supponiamo che $M_d = \{0\}$ e, per ogni $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$, definiamo:

$$\lambda(\omega) = \inf\{\lambda : \Omega_{\lambda,\omega} \subset \Omega\}.$$

Abbiamo visto che

$$x(t) \in \bigcap_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega < \lambda(\omega)\}.$$

Problema 2

Calcolare (o stimare) la funzione $\lambda(\omega)$.

Conclusione

Perciò, finché $\Omega_{\lambda,\omega}$ resta incluso in Ω , $\pi_{\lambda,\omega}$ non può contenere punti critici di u , cioè:

$$C(t) \subseteq \bigcap_{\substack{\Omega_{\lambda,\omega} \subset \Omega \\ \omega \in \mathbb{S}^{N-1}}} H^{\lambda,\omega},$$

dove

$$H^{\lambda,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega < \lambda\}.$$

In particolare

- 1 Se Ω è simmetrico rispetto ad un piano, $C(t)$ è contenuto in quel piano.
- 2 Se Ω è convesso ed ha N piani di simmetria **indipendenti**, allora $x(t)$ non si muove.

Ω limitato e convesso

Supponiamo che $M_d = \{0\}$ e, per ogni $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$, definiamo:

$$\lambda(\omega) = \inf\{\lambda : \Omega_{\lambda,\omega} \subset \Omega\}.$$

Abbiamo visto che

$$x(t) \in \bigcap_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega < \lambda(\omega)\}.$$

Problema 2

Calcolare (o stimare) la funzione $\lambda(\omega)$.

Conclusione

Perciò, finché $\Omega_{\lambda,\omega}$ resta incluso in Ω , $\pi_{\lambda,\omega}$ non può contenere punti critici di u , cioè:

$$C(t) \subseteq \bigcap_{\substack{\Omega_{\lambda,\omega} \subset \Omega \\ \omega \in \mathbb{S}^{N-1}}} H^{\lambda,\omega},$$

dove

$$H^{\lambda,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega < \lambda\}.$$

In particolare

- 1 Se Ω è simmetrico rispetto ad un piano, $C(t)$ è contenuto in quel piano.
- 2 Se Ω è convesso ed ha N piani di simmetria **indipendenti**, allora $x(t)$ non si muove.

Ω limitato e convesso

Supponiamo che $M_d = \{0\}$ e, per ogni $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$, definiamo:

$$\lambda(\omega) = \inf\{\lambda : \Omega_{\lambda,\omega} \subset \Omega\}.$$

Abbiamo visto che

$$x(t) \in \bigcap_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \omega < \lambda(\omega)\}.$$

Problema 2

Calcolare (o stimare) la funzione $\lambda(\omega)$.

Hot spot stazionario: una condizioni necessaria generale

Problema 2 (Klamkin (1994))

Sia Ω convesso e sia $x(t) = p$ per ogni $t > 0$. Che forma ha Ω ?

R.M. - Sakaguchi (2004)

- 1 Ω limitato (non necessariamente convesso), $p \in \Omega$;
- 2 $\partial\Omega$ lipschitziana;
- 3 $R=d(p)$;
- 4 $x(t) = p$ per ogni $t > 0$.

Allora

$$\int_{\partial\Omega \cap \partial B(p,R)} (x - p) dS_x = 0.$$

Se $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega \cap \partial B(0, R)) = 0$

- 1 $\partial\Omega$ di classe C^2 a tratti;
- 2 M_k^m sono m -sottovarietà senza bordo di $\partial B(p, R)$ a due a due disgiunte e

$$\partial\Omega \cap \partial B(p, R) = \bigcup_{m=0}^{N-1} \bigcup_{k=1}^{K_m} M_k^m;$$

- 3 $\mu = \max\{m : \bigcup_{k=1}^{K_m} M_k^m \neq \emptyset\}$;
- 4 $\mathcal{K}_\mu(x) = \left\{ \prod_{j=\mu+1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - \kappa_j(x) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}$.

Allora

$$\sum_{k=1}^{K_\mu} \int_{M_k^\mu} (x - p) \mathcal{K}_\mu(x) d\mathcal{H}^\mu = 0.$$

Hot spot stazionario: una condizioni necessaria generale

Problema 2 (Klamkin (1994))

Sia Ω convesso e sia $x(t) = p$ per ogni $t > 0$. Che forma ha Ω ?

R.M. - Sakaguchi (2004)

- 1 Ω limitato (non necessariamente convesso), $p \in \Omega$;
- 2 $\partial\Omega$ lipschitziana;
- 3 $R=d(p)$;
- 4 $x(t) = p$ per ogni $t > 0$.

Allora

$$\int_{\partial\Omega \cap \partial B(p,R)} (x - p) dS_x = 0.$$

Se $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega \cap \partial B(0, R)) = 0$

- 1 $\partial\Omega$ di classe C^2 a tratti;
- 2 M_k^m sono m -sottovarietà senza bordo di $\partial B(p, R)$ a due a due disgiunte e

$$\partial\Omega \cap \partial B(p, R) = \bigcup_{m=0}^{N-1} \bigcup_{k=1}^{K_m} M_k^m;$$

- 3 $\mu = \max\{m : \bigcup_{k=1}^{K_m} M_k^m \neq \emptyset\}$;

- 4 $\mathcal{K}_\mu(x) = \left\{ \prod_{j=\mu+1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - \kappa_j(x) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}$.

Allora

$$\sum_{k=1}^{K_\mu} \int_{M_k^\mu} (x - p) \mathcal{K}_\mu(x) d\mathcal{H}^\mu = 0.$$

Hot spot stazionario: una condizioni necessaria generale

Problema 2 (Klamkin (1994))

Sia Ω convesso e sia $x(t) = p$ per ogni $t > 0$. Che forma ha Ω ?

R.M. - Sakaguchi (2004)

- 1 Ω limitato (non necessariamente convesso), $p \in \Omega$;
- 2 $\partial\Omega$ lipschitziana;
- 3 $R=d(p)$;
- 4 $x(t) = p$ per ogni $t > 0$.

Allora

$$\int_{\partial\Omega \cap \partial B(p,R)} (x - p) dS_x = 0.$$

Se $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega \cap \partial B(0, R)) = 0$

- 1 $\partial\Omega$ di classe C^2 a tratti;
- 2 M_k^m sono m -sottovarietà senza bordo di $\partial B(p, R)$ a due a due disgiunte e

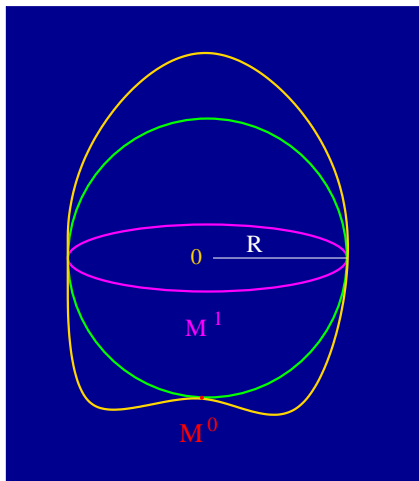
$$\partial\Omega \cap \partial B(p, R) = \bigcup_{m=0}^{N-1} \bigcup_{k=1}^{K_m} M_k^m;$$

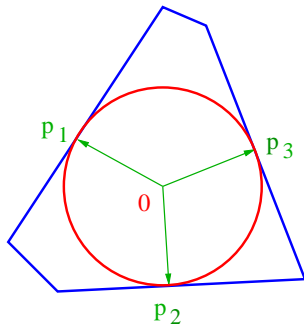
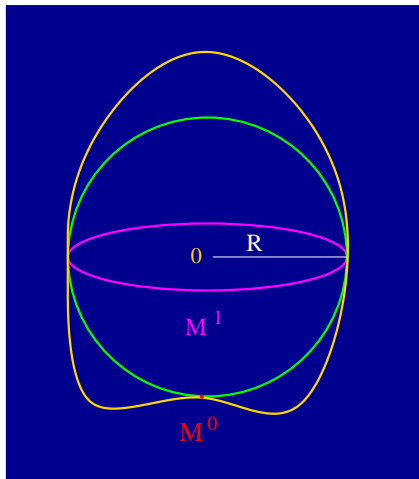
- 3 $\mu = \max\{m : \bigcup_{k=1}^{K_m} M_k^m \neq \emptyset\}$;

- 4 $\mathcal{K}_\mu(x) = \left\{ \prod_{j=\mu+1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - \kappa_j(x) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}$.

Allora

$$\sum_{k=1}^{K_\mu} \int_{M_k^\mu} (x - p) \mathcal{K}_\mu(x) d\mathcal{H}^\mu = 0.$$





Corollario: se $x(t) = 0$ per ogni $t > 0$

Se Ω è un poliedro convesso allora
 $\partial\Omega \cap \partial B(0, R) = \{p_i\}_{i=1, \dots, m}$ e quindi

$$\sum_{i=1}^m p_i = 0.$$

Dimostrazione della condizione necessaria: prima parte

Proprietà della media (per punti invarianti)

Se $v_t = \Delta v$ in $D \times (0, \infty)$ e $v(p, t) = c$ per ogni $t > 0$, allora

$$\frac{1}{|B(p, r)|} \int_{B(p, r)} v(x, t) dx = c = v(p, t),$$

per ogni $r < \text{dist}(p, \partial D)$ e $t > 0$.

Corollario

Dato che ogni componente di ∇v soddisfa ancora l'equazione del calore, se $\nabla v(p, t) = 0$ per ogni $t > 0$, si ha:

$$\int_{B(p, r)} (x - p) v(x, t) dx = 0,$$

per ogni $r < \text{dist}(p, \partial D)$ e $t > 0$.

Boundary layer

Scegliamo

- 1 $v(x, t) = u(x, t)$ (i.e. $u = 1$ su $\Omega \times \{0\}$; $u = 0$ su $\partial\Omega \times (0, \infty)$);
- 2 $r = R = d(p)$, in modo che $B(p, R)$ tocchi $\partial\Omega$;

e sfruttiamo il "boundary layer" che $u(x, t)$ sviluppa quando $t \rightarrow 0^+$.

Barriere per t piccolo; $\varepsilon > 0$ parametro

La formula di Varadhan,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (-4t) \log\{1 - u(x, t)\} = d(x)^2,$$

suggerisce la costruzione di due barriere:

$$F_-^\varepsilon\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \leq u(x, t) \leq F_+^\varepsilon\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right)$$

Dimostrazione della condizione necessaria: prima parte

Proprietà della media (per punti invarianti)

Se $v_t = \Delta v$ in $D \times (0, \infty)$ e $v(p, t) = c$ per ogni $t > 0$, allora

$$\frac{1}{|B(p, r)|} \int_{B(p, r)} v(x, t) dx = c = v(p, t),$$

per ogni $r < \text{dist}(p, \partial D)$ e $t > 0$.

Corollario

Dato che ogni componente di ∇v soddisfa ancora l'equazione del calore, se $\nabla v(p, t) = 0$ per ogni $t > 0$, si ha:

$$\int_{B(p, r)} (x - p) v(x, t) dx = 0,$$

per ogni $r < \text{dist}(p, \partial D)$ e $t > 0$.

Boundary layer

Scegliamo

- 1 $v(x, t) = u(x, t)$ (i.e. $u = 1$ su $\Omega \times \{0\}$; $u = 0$ su $\partial\Omega \times (0, \infty)$);
- 2 $r = R = d(p)$, in modo che $B(p, R)$ tocchi $\partial\Omega$;

e sfruttiamo il "boundary layer" che $u(x, t)$ sviluppa quando $t \rightarrow 0^+$.

Barriere per t piccolo; $\varepsilon > 0$ parametro

La formula di Varadhan,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (-4t) \log\{1 - u(x, t)\} = d(x)^2,$$

suggerisce la costruzione di due barriere:

$$F_-^\varepsilon\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \leq u(x, t) \leq F_+^\varepsilon\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right)$$

Dimostrazione della condizione necessaria: prima parte

Proprietà della media (per punti invarianti)

Se $v_t = \Delta v$ in $D \times (0, \infty)$ e $v(p, t) = c$ per ogni $t > 0$, allora

$$\frac{1}{|B(p, r)|} \int_{B(p, r)} v(x, t) dx = c = v(p, t),$$

per ogni $r < \text{dist}(p, \partial D)$ e $t > 0$.

Corollario

Dato che ogni componente di ∇v soddisfa ancora l'equazione del calore, se $\nabla v(p, t) = 0$ per ogni $t > 0$, si ha:

$$\int_{B(p, r)} (x - p) v(x, t) dx = 0,$$

per ogni $r < \text{dist}(p, \partial D)$ e $t > 0$.

Boundary layer

Scegliamo

- 1 $v(x, t) = u(x, t)$ (i.e. $u = 1$ su $\Omega \times \{0\}$; $u = 0$ su $\partial\Omega \times (0, \infty)$);
- 2 $r = R = d(p)$, in modo che $B(p, R)$ tocchi $\partial\Omega$;

e sfruttiamo il "boundary layer" che $u(x, t)$ sviluppa quando $t \rightarrow 0^+$.

Barriere per t piccolo; $\varepsilon > 0$ parametro

La formula di Varadhan,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (-4t) \log\{1 - u(x, t)\} = d(x)^2,$$

suggerisce la costruzione di due barriere:

$$F_-^\varepsilon\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \leq u(x, t) \leq F_+^\varepsilon\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right)$$

Dimostrazione della condizione necessaria: prima parte

Proprietà della media (per punti invarianti)

Se $v_t = \Delta v$ in $D \times (0, \infty)$ e $v(p, t) = c$ per ogni $t > 0$, allora

$$\frac{1}{|B(p, r)|} \int_{B(p, r)} v(x, t) \, dx = c = v(p, t),$$

per ogni $r < \text{dist}(p, \partial D)$ e $t > 0$.

Corollario

Dato che ogni componente di ∇v soddisfa ancora l'equazione del calore, se $\nabla v(p, t) = 0$ per ogni $t > 0$, si ha:

$$\int_{B(p, r)} (x - p) v(x, t) \, dx = 0,$$

per ogni $r < \text{dist}(p, \partial D)$ e $t > 0$.

Boundary layer

Scegliamo

- 1 $v(x, t) = u(x, t)$ (i.e. $u = 1$ su $\Omega \times \{0\}$; $u = 0$ su $\partial\Omega \times (0, \infty)$);
- 2 $r = R = d(p)$, in modo che $B(p, R)$ tocchi $\partial\Omega$;

e sfruttiamo il "boundary layer" che $u(x, t)$ sviluppa quando $t \rightarrow 0^+$.

Barriere per t piccolo; $\varepsilon > 0$ parametro

La formula di Varadhan,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (-4t) \log\{1 - u(x, t)\} = d(x)^2,$$

suggerisce la costruzione di due barriere:

$$F_-^\varepsilon \left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}} \right) \leq u(x, t) \leq F_+^\varepsilon \left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}} \right)$$

Dimostrazione della condizione necessaria: seconda parte

Il teorema di Fubini implica

Se F è a variazione limitata, $d\nu(dx) = \varphi(x) dx$ con $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\int_{B(p,R)} F\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \nu(dx) = \int_0^{2R/\sqrt{t}} F'(\sigma) \nu(\{x \in B(p,R) : d(x) > \sigma\sqrt{t}\}) d\sigma$$

Dunque

$$t^{-\frac{N+1-\mu}{4}} \int_{B(p,R)} F\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \nu(dx) \rightarrow \frac{N+1-\mu}{2} A_{\Omega,R}^{\mu,N} \int_0^\infty \sigma^{\frac{N-1-\mu}{2}} F(\sigma) d\sigma$$

Conclusione

Si sceglie $\varphi(x) = (x_i - p_i)^\pm$, $F = F_\pm^\varepsilon$, e si usa il fatto che, se $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\int_0^\infty \sigma^{\frac{N-1-\mu}{2}} F_\pm^\varepsilon(\sigma) d\sigma \rightarrow c(N, \mu),$$

con $c(N, \mu)$ indipendente da \pm .

Lemma cruciale

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{-\frac{N+1-\mu}{2}} \nu(\{x \in B(p,R) : d(x) < s\}) =$$

$$C(N, \mu) \sum_{k=1}^{K_\mu} \int_{M_k^\mu} \varphi(x) \mathcal{K}_\mu(x) d\mathcal{H}^\mu := A_{\Omega,R}^{\mu,N}$$

Dimostrazione della condizione necessaria: seconda parte

Il teorema di Fubini implica

Se F è a variazione limitata, $d\nu(dx) = \varphi(x) dx$ con $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\int_{B(p,R)} F\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \nu(dx) = \int_0^{2R/\sqrt{t}} F'(\sigma) \nu(\{x \in B(p,R) : d(x) > \sigma\sqrt{t}\}) d\sigma$$

Dunque

$$t^{-\frac{N+1-\mu}{4}} \int_{B(p,R)} F\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \nu(dx) \rightarrow \frac{N+1-\mu}{2} A_{\Omega,R}^{\mu,N} \int_0^\infty \sigma^{\frac{N-1-\mu}{2}} F(\sigma) d\sigma$$

Lemma cruciale

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{-\frac{N+1-\mu}{2}} \nu(\{x \in B(p,R) : d(x) < s\}) =$$

$$C(N, \mu) \sum_{k=1}^{K_\mu} \int M_k^\mu \varphi(x) \mathcal{K}_\mu(x) d\mathcal{H}^\mu := A_{\Omega,R}^{\mu,N}$$

Conclusione

Si sceglie $\varphi(x) = (x_i - p_i)^\pm$, $F = F_\pm^\varepsilon$, e si usa il fatto che, se $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\int_0^\infty \sigma^{\frac{N-1-\mu}{2}} F_\pm^\varepsilon(\sigma) d\sigma \rightarrow c(N, \mu),$$

con $c(N, \mu)$ indipendente da \pm .

Dimostrazione della condizione necessaria: seconda parte

Il teorema di Fubini implica

Se F è a variazione limitata, $d\nu(dx) = \varphi(x) dx$ con $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\int_{B(p,R)} F\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \nu(dx) = \int_0^{2R/\sqrt{t}} F'(\sigma) \nu(\{x \in B(p,R) : d(x) > \sigma\sqrt{t}\}) d\sigma$$

Dunque

$$t^{-\frac{N+1-\mu}{4}} \int_{B(p,R)} F\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \nu(dx) \rightarrow \frac{N+1-\mu}{2} A_{\Omega,R}^{\mu,N} \int_0^\infty \sigma^{\frac{N-1-\mu}{2}} F(\sigma) d\sigma$$

Lemma cruciale

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{-\frac{N+1-\mu}{2}} \nu(\{x \in B(p,R) : d(x) < s\}) =$$

$$C(N, \mu) \sum_{k=1}^{K_\mu} \int_{M_k^\mu} \varphi(x) \mathcal{K}_\mu(x) d\mathcal{H}^\mu := A_{\Omega,R}^{\mu,N}$$

Conclusione

Si sceglie $\varphi(x) = (x_i - p_i)^\pm$, $F = F_\pm^\varepsilon$, e si usa il fatto che, se $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\int_0^\infty \sigma^{\frac{N-1-\mu}{2}} F_\pm^\varepsilon(\sigma) d\sigma \rightarrow c(N, \mu),$$

con $c(N, \mu)$ indipendente da \pm .

Dimostrazione della condizione necessaria: seconda parte

Il teorema di Fubini implica

Se F è a variazione limitata, $d\nu(dx) = \varphi(x) dx$ con $\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\int_{B(p,R)} F\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \nu(dx) = \int_0^{2R/\sqrt{t}} F'(\sigma) \nu(\{x \in B(p,R) : d(x) > \sigma\sqrt{t}\}) d\sigma$$

Lemma cruciale

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^{-\frac{N+1-\mu}{2}} \nu(\{x \in B(p,R) : d(x) < s\}) =$$

$$C(N, \mu) \sum_{k=1}^{K_\mu} \int_{M_k^\mu} \varphi(x) \mathcal{K}_\mu(x) d\mathcal{H}^\mu := A_{\Omega,R}^{\mu,N}$$

Dunque

$$t^{-\frac{N+1-\mu}{4}} \int_{B(p,R)} F\left(\frac{d(x)}{\sqrt{t}}\right) \nu(dx) \rightarrow \frac{N+1-\mu}{2} A_{\Omega,R}^{\mu,N} \int_0^\infty \sigma^{\frac{N-1-\mu}{2}} F(\sigma) d\sigma$$

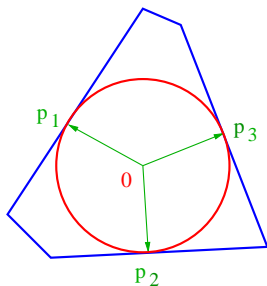
Conclusione

Si sceglie $\varphi(x) = (x_i - p_i)^\pm$, $F = F_\pm^\varepsilon$, e si usa il fatto che, se $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$\int_0^\infty \sigma^{\frac{N-1-\mu}{2}} F_\pm^\varepsilon(\sigma) d\sigma \rightarrow c(N, \mu),$$

con $c(N, \mu)$ indipendente da \pm .

Simmetria: triangoli e quadrilateri

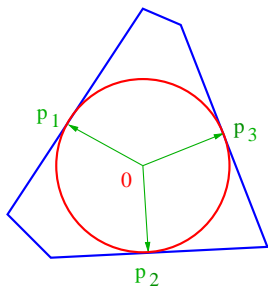


Centro di massa nell'hot spot

Abbiamo già osservato che per i poligoni il nostro teorema implica che

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

Simmetria: triangoli e quadrilateri



Simmetria

Sia $x(t) = p$ per ogni $t > 0$. Allora

- 1 se Ω è un triangolo $\Rightarrow \Omega$ è equilatero;
- 2 se Ω è un quadrilatero $\Rightarrow \Omega$ è un parallelogramma.

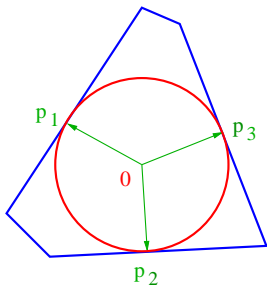
In particolare, un quadrangolo non convesso non ammette hot spot stazionario.

Centro di massa nell'hot spot

Abbiamo già osservato che per i poligoni il nostro teorema implica che

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

Simmetria: triangoli e quadrilateri



Simmetria

Sia $x(t) = p$ per ogni $t > 0$. Allora

- 1 se Ω è un triangolo $\Rightarrow \Omega$ è equilatero;
- 2 se Ω è un quadrilatero $\Rightarrow \Omega$ è un parallelogramma.

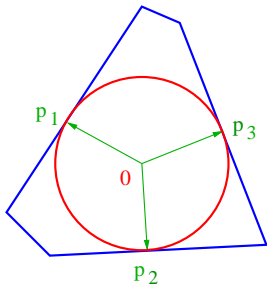
In particolare, un quadrangolo non convesso non ammette hot spot stazionario.

Centro di massa nell'hot spot

Abbiamo già osservato che per i poligoni il nostro teorema implica che

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

Simmetria: triangoli e quadrilateri



Simmetria

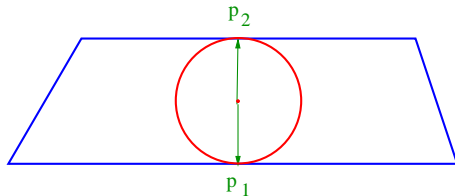
Sia $x(t) = p$ per ogni $t > 0$. Allora

- 1 se Ω è un triangolo $\Rightarrow \Omega$ è equilatero;
- 2 se Ω è un quadrilatero $\Rightarrow \Omega$ è un parallelogramma.

In particolare, un quadrangolo non convesso non ammette hot spot stazionario.

Trapezio

Il caso più difficile da trattare è quello illustrato nella figura qui sotto.

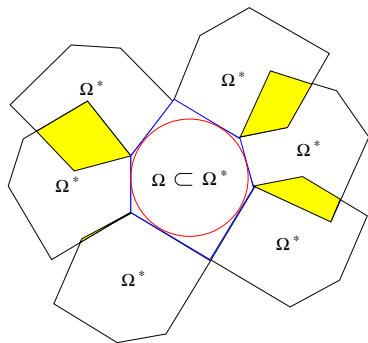


Centro di massa nell'hot spot

Abbiamo già osservato che per i poligoni il nostro teorema implica che

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

Poligoni: un'altra condizione



Se Ω è un poligono

Con il **principio di riflessione di Schwarz** rispetto a **ciascun lato**, si può estendere u ad una soluzione u^* di $u_t^* = \Delta u^*$, definita in tutto il **dominio bianco** Ω^* .

Si ha ancora che $u^*(0, t) = 0$ per ogni $t > 0$ e quindi

$$\int_{B(0,r)} x u^*(x, t) dx = 0$$

questa volta per ogni $r \leq R^*$, dove

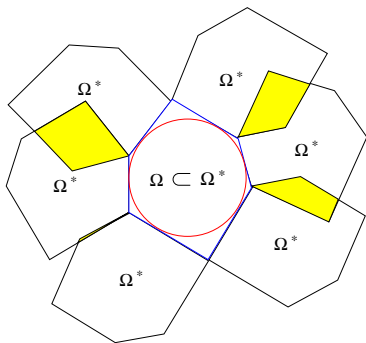
R^* è la distanza di 0 dai vertici più vicini di Ω .

Scegliendo $r = R^*$, abbiamo allora che

$$\int_{B(0,R^*)} x u^*(x, t) dx = 0 \text{ per ogni } t > 0,$$

ma non è conveniente lavorare con questo integrale.

Poligoni: un'altra condizione



Se Ω è un poligono

Con il **principio di riflessione di Schwarz** rispetto a **ciascun lato**, si può estendere u ad una soluzione u^* di $u_t^* = \Delta u^*$, definita in tutto il **dominio bianco** Ω^* .

Si ha ancora che $u^*(0, t) = 0$ per ogni $t > 0$ e quindi

$$\int_{B(0,r)} x u^*(x, t) dx = 0$$

questa volta per ogni $r \leq R^*$, dove

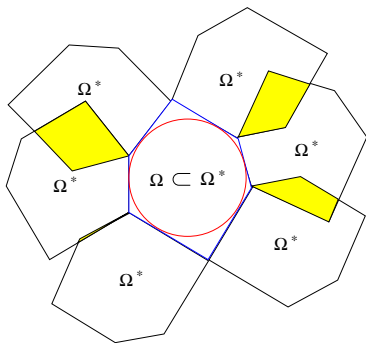
R^* è la distanza di 0 dai **vertici più vicini di Ω** .

Scegliendo $r = R^*$, abbiamo allora che

$$\int_{B(0,R^*)} x u^*(x, t) dx = 0 \text{ per ogni } t > 0,$$

ma non è conveniente lavorare con questo integrale.

Poligoni: un'altra condizione



Se Ω è un poligono

Con il **principio di riflessione di Schwarz** rispetto a **ciascun lato**, si può estendere u ad una soluzione u^* di $u_t^* = \Delta u^*$, definita in tutto il **dominio bianco** Ω^* .

Si ha ancora che $u^*(0, t) = 0$ per ogni $t > 0$ e quindi

$$\int_{B(0,r)} x u^*(x, t) dx = 0$$

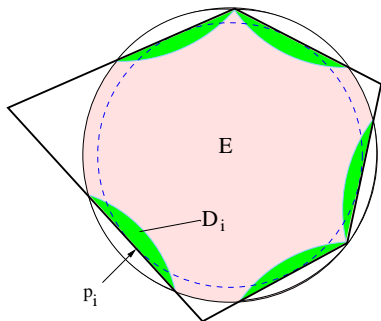
questa volta per ogni $r \leq R^*$, dove

R^* è la distanza di 0 dai **vertici più vicini** di Ω .

Scegliendo $r = R^*$, abbiamo allora che

$$\int_{B(0,R^*)} x u^*(x, t) dx = 0 \text{ per ogni } t > 0,$$

ma non è conveniente lavorare con questo integrale.



Conviene invece riflettere di nuovo le parti di $B(0, R^*)$ che debordano fuori di Ω in Ω stesso.

Risulta che

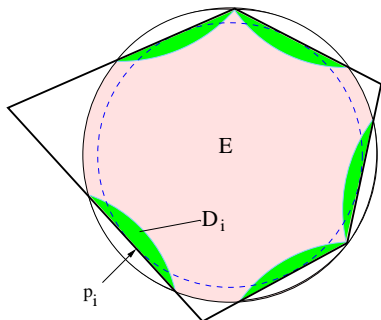
$$\int_{B(0,r)} x u^*(x, t) dx = 0$$

se e solo se

$$\int_E x u(x, t) dx + \sum_i \int_{D_i} (x - x_i^*) u(x, t) dx = 0,$$

dove E è l'insieme rosa, D_i quelli verdi ed x_i^* è la riflessione di x rispetto al lato di Ω contenuto in D_i .

In questo modo si può lavorare con u invece che con u^* .



Risulta che

$$\int_{B(0,r)} x u^*(x, t) dx = 0$$

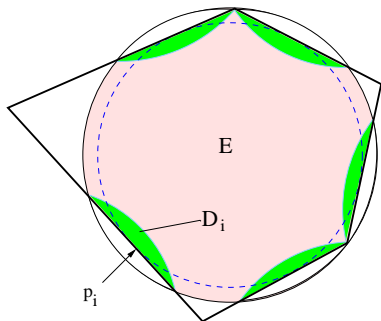
se e solo se

$$\int_E x u(x, t) dx + \sum_i \int_{D_i} (x - x_i^*) u(x, t) dx = 0,$$

dove E è l'insieme **rosa**, D_i quelli **verdi** ed x_i^* è la riflessione di x rispetto al lato di Ω contenuto in D_i .

Conviene invece riflettere di nuovo le parti di $B(0, R^*)$ che debordano fuori di Ω in Ω stesso.

In questo modo si può lavorare con u invece che con u^* .



Risulta che

$$\int_{B(0,r)} x u^*(x, t) dx = 0$$

se e solo se

$$\int_E x u(x, t) dx + \sum_i \int_{D_i} (x - x_i^*) u(x, t) dx = 0,$$

dove E è l'insieme **rosa**, D_i quelli **verdi** ed x_i^* è la riflessione di x rispetto al lato di Ω contenuto in D_i .

Conviene invece riflettere di nuovo le parti di $B(0, R^*)$ che debordano fuori di Ω in Ω stesso.

In questo modo si può lavorare con u invece che con u^* .

Simmetria: pentagoni ed esagoni

Se Ω poligono convesso
"circoscritto"

Con un'analisi asintotica per $t \rightarrow 0^+$, analoga a (ma piú complicata di) quella vista prima, si arriva a concludere che

$$\sum_{j=1}^k q_j = 0,$$

dove i q_j sono i vertici di Ω piú vicini ad 0.

Definizione

Per Ω "circoscritto" intendiamo un poligono il cui cerchio massimo contenuto tocca tutti i suoi lati (di Ω).

Simmetria per certi pentagoni ed esagoni

Se Ω è come nella definizione e $x(t) = 0$ per ogni $t > 0$, dato che anche $\sum_{i=1}^m p_i = 0$, dove i p_i sono i punti di tangenza tra poligono e cerchio inscritto, allora

- 1 se Ω è un pentagono, Ω è regolare;
- 2 se Ω è un esagono, allora è invariante rispetto a rotazioni di angoli $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ e π .

Simmetria: pentagoni ed esagoni

Se Ω poligono convesso
“circoscritto”

Con un'analisi asintotica per $t \rightarrow 0^+$, analoga a (ma piú complicata di) quella vista prima, si arriva a concludere che

$$\sum_{j=1}^k q_j = 0,$$

dove i q_j sono i vertici di Ω piú vicini ad 0.

Definizione

Per Ω “circoscritto” intendiamo un poligono il cui cerchio massimo contenuto tocca tutti i suoi lati (di Ω).

Simmetria per certi pentagoni ed esagoni

Se Ω è come nella definizione e $x(t) = 0$ per ogni $t > 0$, dato che anche $\sum_{i=1}^m p_i = 0$, dove i p_i sono i punti di tangenza tra poligono e cerchio inscritto, allora

- 1 se Ω è un pentagono, Ω è regolare;
- 2 se Ω è un esagono, allora è invariante rispetto a rotazioni di angoli $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ e π .

Simmetria: pentagoni ed esagoni

Se Ω poligono convesso
“circoscritto”

Con un'analisi asintotica per $t \rightarrow 0^+$, analoga a (ma più complicata di) quella vista prima, si arriva a concludere che

$$\sum_{j=1}^k q_j = 0,$$

dove i q_j sono i vertici di Ω più vicini ad 0.

Definizione

Per Ω “circoscritto” intendiamo un poligono il cui cerchio massimo contenuto tocca tutti i suoi lati (di Ω).

Simmetria per certi pentagoni ed esagoni

Se Ω è come nella definizione e $x(t) = 0$ per ogni $t > 0$, dato che anche $\sum_{i=1}^m p_i = 0$, dove i p_i sono i punti di tangenza tra poligono e cerchio inscritto, allora

- 1 se Ω è un pentagono, Ω è regolare;
- 2 se Ω è un esagono, allora è invariante rispetto a rotazioni di angoli $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ e π .

Simmetria: pentagoni ed esagoni

Se Ω poligono convesso
“circoscritto”

Con un'analisi asintotica per $t \rightarrow 0^+$, analoga a (ma più complicata di) quella vista prima, si arriva a concludere che

$$\sum_{j=1}^k q_j = 0,$$

dove i q_j sono i vertici di Ω più vicini ad 0.

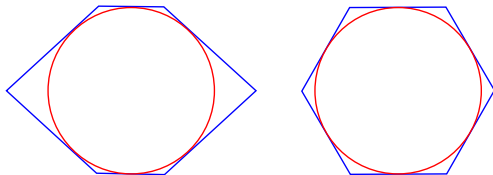
Definizione

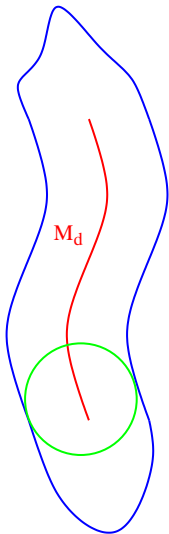
Per Ω “circoscritto” intendiamo un poligono il cui cerchio massimo contenuto tocca tutti i suoi lati (di Ω).

Simmetria per certi pentagoni ed esagoni

Se Ω è come nella definizione e $x(t) = 0$ per ogni $t > 0$, dato che anche $\sum_{i=1}^m p_i = 0$, dove i p_i sono i punti di tangenza tra poligono e cerchio inscritto, allora

- 1 se Ω è un pentagono, Ω è regolare;
- 2 se Ω è un esagono, allora è invariante rispetto a rotazioni di angoli $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ e π .





Problema 3

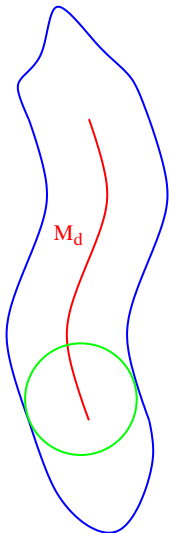
Se $M(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t > 0$, si può dire che M_d è una **curva semplice (non chiusa)** (o è **retrattile**)?

Problema 4: versione globale

Sia M_d una curva semplice; trovare ipotesi su d in modo che si possa dire che $M(t)$ contiene un solo punto $x(t)$ per ogni $t > 0$.

Problema 4: versione locale

Sia M_d una curva semplice; trovare ipotesi su d in modo che si possa dire che esiste $T > 0$ tale che $M(t)$ contiene un solo punto $x(t)$ per ogni $t \in (0, T]$.



Problema 3

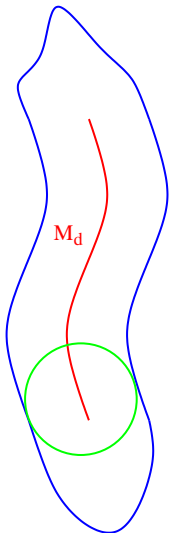
Se $M(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t > 0$, si può dire che M_d è una **curva semplice (non chiusa)** (o è **retrattile**)?

Problema 4: versione globale

Sia M_d una curva semplice; trovare ipotesi su d in modo che si possa dire che $M(t)$ contiene un solo punto $x(t)$ per ogni $t > 0$.

Problema 4: versione locale

Sia M_d una curva semplice; trovare ipotesi su d in modo che si possa dire che esiste $T > 0$ tale che $M(t)$ contiene un solo punto $x(t)$ per ogni $t \in (0, T]$.



Problema 3

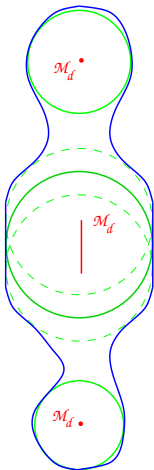
Se $M(t) = \{x(t)\}$ per ogni $t > 0$, si può dire che M_d è una **curva semplice (non chiusa)** (o è **retrattile**)?

Problema 4: versione globale

Sia M_d una curva semplice; trovare ipotesi su d in modo che si possa dire che $M(t)$ contiene un solo punto $x(t)$ per ogni $t > 0$.

Problema 4: versione locale

Sia M_d una curva semplice; trovare ipotesi su d in modo che si possa dire che esiste $T > 0$ tale che $M(t)$ contiene un solo punto $x(t)$ per ogni $t \in (0, T]$.



L'insieme dei punti di massimo locali

Siano $\mathcal{M}(t)$ e \mathcal{M}_d gli insiemi dei punti di massimo relativi di $u(x, t)$ e $d(x)$, rispettivamente.

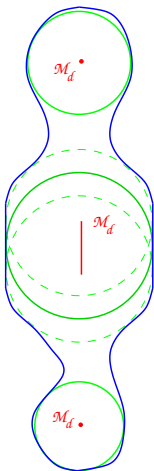
Problem 5: versione globale

Se \mathcal{M}_d è fatto di n curve semplici a due a due disgiunte, si può dire che il numero di punti in $\mathcal{M}(t)$ non supera n ?

In particolare, è vero che il numero dei punti di massimo relativi di u_1 non supera quello delle componenti (curve semplici chiuse) di \mathcal{M}_d ?

Problem 5: versione locale

Se \mathcal{M}_d è fatto di n curve semplici a due a due disgiunte, si può dire che esiste $T > 0$ tale che il numero di punti in $\mathcal{M}(t)$ è uguale ad n per ogni $t \in (0, T]$?



L'insieme dei punti di massimo locali

Siano $\mathcal{M}(t)$ e \mathcal{M}_d gli insiemi dei punti di massimo relativi di $u(x, t)$ e $d(x)$, rispettivamente.

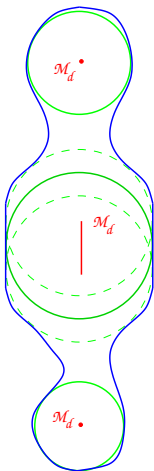
Problem 5: versione globale

Se \mathcal{M}_d è fatto di n curve semplici a due a due disgiunte, si può dire che il numero di punti in $\mathcal{M}(t)$ non supera n ?

In particolare, è vero che il numero dei punti di massimo relativi di u_1 non supera quello delle componenti (curve semplici chiuse) di \mathcal{M}_d ?

Problem 5: versione locale

Se \mathcal{M}_d è fatto di n curve semplici a due a due disgiunte, si può dire che esiste $T > 0$ tale che il numero di punti in $\mathcal{M}(t)$ è uguale ad n per ogni $t \in (0, T]$?



L'insieme dei punti di massimo locali

Siano $\mathcal{M}(t)$ e \mathcal{M}_d gli insiemi dei punti di massimo relativi di $u(x, t)$ e $d(x)$, rispettivamente.

Problem 5: versione globale

Se \mathcal{M}_d è fatto di n curve semplici a due a due disgiunte, si può dire che il numero di punti in $\mathcal{M}(t)$ non supera n ?

In particolare, è vero che il numero dei punti di massimo relativi di u_1 non supera quello delle componenti (curve semplici chiuse) di \mathcal{M}_d ?

Problem 5: versione locale

Se \mathcal{M}_d è fatto di n curve semplici a due a due disgiunte, si può dire che esiste $T > 0$ tale che il numero di punti in $\mathcal{M}(t)$ è uguale ad n per ogni $t \in (0, T]$?