Regolarizzazione

Elisa Francini

1 Informazioni a priori e stabilità

Supponiamo di essere nel caso favorevole in cui K sia un operatore compatto iniettivo. Questo significa che $K^{-1} : \mathcal{R}(K) \to K$ esiste ma non è un operatore limitato.

Sia $\overline{x}$ la soluzione esatta del problema corrispondente al dato $\overline{y}$, cioè sia

$$K\overline{x} = \overline{y} \quad \text{e} \quad \overline{x} = K^{-1}\overline{y}.$$

I problemi sorgono quando il dato è noto con errore, cioè quando invece di disporre di $\overline{y}$ conosciamo il dato misurato y_ε tale che

$$\|\overline{y} - y_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

In tal caso infatti sorgono due difficoltà

- il dato misurato y_ε potrebbe non appartene a $\mathcal{R}(K)$
- anche se vi appartenesse, l'errore che si commette è incontrollabile, infatti

$$\|K^{-1}y_\varepsilon - \overline{x}\| = \|K^{-1}(y_\varepsilon - \overline{y})\|.$$

1.1 Stabilità

Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{S}_\varepsilon = \{x \in X \, : \, \|Kx - y^\varepsilon\| \leq \varepsilon\}.$$

L'insieme $\mathcal{S}_\varepsilon$ contiene la soluzione $\overline{x}$ ed è definito anche se K non è né iniettivo né suriettivo. Il diametro di $\mathcal{S}_\varepsilon$ è una stima dell'errore che si commette quando si approssima $\tilde{x}$ con un qualunque altro elemento di $\mathcal{S}_\varepsilon$.

Se K è compatto e X non ha dimensione finita, $diam(S) = +\infty$. Per ripristinare la stabilità aggiungiamo informazioni sulla soluzione, vale a dire restringiamo S a

$$\mathcal{S}'_\varepsilon = \{x \in X \, : \, \|Kx - y^\varepsilon\| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad x \quad \text{soddisfa condizioni aggiuntive}\},$$

facendo in modo che $\overline{x}$ appartenga ancora all'insieme ma il diametro di $\mathcal{S}'_\varepsilon$ enda a zero quando ε tende a zero.

Il seguente teorema ci suggerisce che le condizioni aggiuntive dovrebbero essere tali da rendere compatto l'insieme.

Teorema di Tikhonov. *Sia $K : \mathcal{D}(K) \subset X \to Y$ un operatore iniettivo continuo e sia $C \subseteq \mathcal{D}(K)$ un insieme compatto in X. Allora, l'operatore inverso*

$$(K_{|C})^{-1} : K(C) \to C$$

è continuo.

Dim. Sia $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una successione convergente in $K(C)$ e sia $\phi = \lim_n \phi_n$. Dobbiamo far vedere che $\{\psi_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{(K_{|C})^{-1}\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset C$ converge in C a $\psi = (K_{|C})^{-1}\phi$. Per farlo, è sufficiente dimostrare che ogni sottosuccessione di ψ_n ha una sottosuccessione convergente a ψ. Sia $\{\psi_{n_j}\}_j$ una sottosuccessione di $\{\psi_n\}_n$. Poiché C è compatto, $\{\psi_{n_j}\}_j$ ha una sottosuccessione $\{\psi_{n_{j_k}}\}_k$ convergente a qualche $\overline{\psi} \in C$. Ma K è un operatore continuo, quindi

$$\phi = \lim_k \phi_{n_{j_k}} = \lim_k K(\psi_{n_{j_k}}) = K(\lim_k \psi_{n_{j_k}}) = K(\overline{\psi}).$$

Dal momento che K è iniettivo, si ha $\overline{\psi} = \psi$. $\square$

Osserviamo che gli insiemi $\mathcal{S}_\varepsilon$ e $\mathcal{S}'_\varepsilon$ sono ben definiti anche se l'operatore Knon è suriettivo né iniettivo.

2 Teoria generale della regolarizzazione

Lo scopo dei metodi di regolarizzazione è quello di costruire, a partire dal dato misurato y_ε, una soluzione x_ε che sia vicina alla soluzione reale $\overline{x}$. L'ideale sarebbe costruire una funzione dello spazio $\mathcal{S}'_\varepsilon$, ma ci accontenteremo di metodi che forniscano approssimazione tali che $\|\overline{x} - x_\varepsilon\| \to 0$ per $\varepsilon \to 0$. Iniziamo con un esempio introduttivo.

2.1 Approssimazione della derivata con il rapporto incrementale da un lato

Come esempio introduttivo, vediamo il problema della derivazione numerica. Abbiamo visto che si può derivare con un processo stabile una funzione $y \in H^2(0,1)$ con $\|y''\|_{L^2} \le E$.

Approssimiamo $y'(t)$ con i rapporti incrementali da un lato. Analizziamo prima il caso senza errori. Fissiamo $h \in (0, 1/2)$ e definiamo

$$v(t) = \begin{cases} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} & t \in (0,1/2), \\ \frac{y(t)-y(t-h)}{h} & t \in (1/2,1). \end{cases}$$

Per valutare la differenza tra v e y' utilizziamo la

Formula di Taylor. *Sia $y \in H^{n+1}(a,b)$ e siano $t, t+h \in (a,b)$. Allora*

$$y(t+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(t)}{k!} h^k + R_n(t,h),$$

dove

$$R_n(t,h) = \frac{1}{n!} \int_t^{t+h} (t+h-s)^n y^{(n+1)}(s)\, ds.$$

Dim. della Formula di Taylor per $n = 1$. Se $y \in H^2$, la sua derivata prima $y' \in H^1$ ed è una funzione assolutamente continua e per $\tau, t \in (a, b)$

$$y'(\tau) - y'(t) = \int_t^\tau y''(s)\, ds,$$

e

$$\begin{aligned} y(t+h) - y(t) &= \int_t^{t+h} y'(\tau)\, d\tau = \int_t^{t+h} \left(y'(t) + \int_t^\tau y''(s)\, ds \right) d\tau \\ &= y'(t)h + \int_t^{t+h} \int_\tau^{t+h} d\tau y''(s)\, ds \\ &= y'(t)h + \int_t^{t+h} (t+h-\tau) y''(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

□

Utilizziamo la formula di Taylor con $n = 1$, in t, $t+h$ e $t-h$.

$$y(t \pm h) - y(t) = \pm y'(t)h + \int_t^{t \pm h} (t \pm h - \tau) y''(\tau)\, d\tau.$$

Per $t \in (0, 1/2)$,

$$v(t) - y'(t) = \frac{1}{h} \int_h^{t+h} (t+h-\tau) y''(\tau)\, d\tau = \frac{1}{h} \int_h^{t+h} \tau y''(t+h-\tau)\, d\tau.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} h^2 \|v - y'\|^2_{L^2(0,1/2)} &= h^2 \int_0^{1/2} (v(t) - y'(t))^2 dt \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^h \tau y''(t+h-\tau)\, d\tau \int_0^h s y''(t+h-s)\, ds \\ &= \int_0^h \int_0^h s\tau \left[\int_0^{1/2} y''(t+h-\tau) y''(t+h-s)\, dt \right] d\tau\, ds \\ &\leq \int_0^h \int_0^h s\tau \left(\int_0^{1/2} |y''(t+h-\tau)|^2 dt \right) d\tau\, ds \\ &\leq \|y''\|^2_{L^2(0,1)} \left(\int_0^h s\, ds \right)^2 = \frac{h^4}{4} \|y''\|^2_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

con calcoli analoghi per $t \in (1/2, 1)$ si ottiene infine,

$$\|v - y'\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{Eh}{\sqrt{2}}$$

dalla quale si vede che se h tende a zero il rapporto incrementale v converge alla derivata.

Vediamo adesso cosa succesde se si introduce un errore. Invece di y supponiamo di aver misurato y^ε tale che $\|y - y_\varepsilon\|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon$. Anziché v costruiamo l'approssimazione

$$v_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{y_\varepsilon(t+h)-y_\varepsilon(t)}{h} & t \in (0,1/2), \\ \frac{y_\varepsilon(t)-y_\varepsilon(t-h)}{h} & t \in (1/2,1). \end{cases}$$

Stimiamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} |v_\varepsilon(t) - v(t)|^2 dt &\leq \frac{1}{h^2} \int_0^{1/2} \left(|y_\varepsilon(t+h) - y(t+h)| + |y_\varepsilon(t) - y(t)|\right)^2 dt \\
&\leq \frac{2}{h^2} \left(\int_0^{1/2} |y_\varepsilon(t+h) - y(t+h)|^2 dt + \int_0^{1/2} |y_\varepsilon(t) - y(t)|^2 dt \right) \\
&\leq \frac{2}{h^2} \left(2\|y_\varepsilon - y\|^2_{L^2(0,1)} \right)
\end{aligned}$$

da cui

$$\|v_\varepsilon - v\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{h}.$$

L'errore che si commette approssimando con v^ε la derivata di y è quindi

$$\|v_\varepsilon - y'\|_{L^2(0,1)} \leq \|v_\varepsilon - v\|_{L^2} + \|v - y'\|_{L^2} \leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{h} + \frac{Eh}{\sqrt{2}}.$$

h è il parametro di discretizzazione. Il minimo dell'errore totale vale $2\sqrt{2\varepsilon E}$ e si realizza scegliendo $h = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{E}}$.

2.2 Strategie di regolarizzazione

L'idea di base della regolarizzazione è quella di costruire approssimazioni limitate dell'operatore $K^{-1} : R(K) \to Y$.

Definizione 2.1 *Una strategia di regolarizzazione è una famiglia ad un parametro di operatori lineari e limitati*

$$R_\alpha : Y \to X, \quad \alpha > 0,$$

tali che

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha K x = x \quad \textit{per ogni} \quad x \in X,$$

cioè l'operatore $R_\alpha K$ converge puntualmente all'identità.

Da questa definizione e per la compattezza dell'operatore K si ha che

Teorema 2.2 *Sia R_α una strategia di regolarizzazione per l'operatore compatto $K : X \to Y$ con $dim(X) = +\infty$. Allora:*

1. *Gli operatori R_α non sono uniformemente limitati, cioè esiste una successione a_j convergente a zero, tale che*

$$\|R_{\alpha_j}\| \to +\infty \quad \textit{per} \quad j \to +\infty.$$

2. *La successione $\{R_\alpha Kx\}_\alpha$ non converge uniformemente sui sottoinsiemi limitati di X, cioè $R_\alpha K$ non converge all'identità nella norma degli operatori.*

Dim. 1) Se esistesse C tale che $\|R_\alpha\| \leq C$ per ogni α, si avrebbe allora $\|R_\alpha y\| \leq C\|y\|$ per ogni $y \in K(X)$. Ma $R_\alpha y$ converge a $K^{-1}y$ e quindi $\|K^{-1}y\| \leq C\|y\|$ contrariamente al fatto che K è compatto e X non ha dimensione finita.

2) Per ogni α, $R_\alpha K$ è un operatore compatto. Se $R_\alpha K \to I$ nella norma degli operatori, allora $I : X \to X$ è compatta con $dim X = +\infty$ e questo è assurdo. □

La nozione di strategia di regolarizzazione è basata su dati esatti: $R_\alpha \overline{y}$ converge ad $\overline{x}$ se $\overline{y} = K\overline{x}$. Vediamo cosa succede se introduciamo un errore.

Sia $\overline{y} = K\overline{x}$ il dato esatto e sia $y_\varepsilon \in Y$ il dato misurato con $\|\overline{y} - y_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

Definiamo
$$x_{\alpha,\varepsilon} := R_\alpha y_\varepsilon$$
e valutiamo l'errore che si compie approssimando $\overline{x}$ con $x_{\alpha,\varepsilon}$:
$$\begin{aligned}
\|x_{\alpha,\varepsilon} - \overline{x}\| &\leq \|R_\alpha y_\varepsilon - R_\alpha \overline{y}\| + \|R_\alpha \overline{y} - \overline{x}\| \\
&\leq \|R_\alpha\|\|y_\varepsilon - \overline{y}\| + \|R_\alpha K\overline{x} - \overline{x}\| \\
&\leq \varepsilon\|R_\alpha\| + \|R_\alpha K\overline{x} - \overline{x}\|.
\end{aligned}$$
Questa stima presenta una caratteristica fondamentale: l'errore è diviso in due parti. Il primo termine descrive quanto l'approssimazione R_α dell'inverso di K amplifica l'errore ε sul dato. Per il teorema precedente, al tendere di α a zero questo termine tende a $+\infty$. Il secondo termine indica l'errore che si commette approssimando l'identità con $R_\alpha K$. Per definizione di strategia di regolarizzazione questo termine tende a zero quando α tende a zero.

A questo punto è necessario scegliere $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ dipendente da ε in modo da rendere l'errore più piccolo possibile. L'ideale sarebbe minimizzare la somma $\varepsilon\|R_\alpha\| + \|R_\alpha K\overline{x} - \overline{x}\|$, ma questo, in genere, non è possibile con le informazioni a disposizione.

Introduciamo la seguenti definizione:

Definizione 2.3 *Una strategia di regolarizzazione $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ si dice ammissibile se $\alpha(\varepsilon) \to 0$ e $\sup\{\|R_{\alpha(\varepsilon)}y^\varepsilon - x\| : \|Kx - y^\varepsilon\| \leq \varepsilon\} \to 0$ per ogni $x \in X$.*

Riprendiamo l'esempio del paragrafo 2.1 e chiamiamo
$$R_h(t) = \begin{cases} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} & t \in (0, 1/2), \\ \frac{y(t)-y(t-h)}{h} & t \in (1/2, 1). \end{cases}$$
Verifichiamo che R_h è una strategia di regolarizzazione.

- *Per ogni h l'operatore $R_h : L^2 \to L^2$ è limitato.*

$$\begin{aligned}
h^2 \int_0^1 (R_h y(t))^2\, dt &= \int_0^{1/2} (y(t+h) - y(t))^2 dt + \int_{1/2}^1 (y(t) - y(t-h))^2 dt \\
&\leq 2\left(\int_0^{1/2} y^2(t+h) + y^2(t) dt + \int_{1/2}^1 y^2(t) + y^2(t-h) dt\right) \\
&\leq 6\|y\|^2_{L^2(0,1)},
\end{aligned}$$

cioè

$$\|R_h\| \le \frac{\sqrt{6}}{h}.$$

- *Mostriamo poi che $R_hKx \to x$ per ogni $x \in L^2(0,1)$.* Dal paragrafo 2.1 sappiamo che

$$\|R_hKx - x\|_{L^2} \le \frac{h}{\sqrt{2}}\|x'\|_{L^2} \quad \text{per ogni} \quad x \in H^1(0,1),$$

cioè sappiamo che $R_hK - I$ converge puntualmente a zero su un sottoinsieme denso di L^2. Per dimostrare che converge puntualmente su tutto lo spazio, utilizziamo il seguente risultato, conseguenza del Teorema di Banach-Steinhaus.

Proposizione 2.4 *Sia A_n una successione di operatori lineari limitati da X spazio di Banach in Y spazio normato e sia $D \subset X$ un sottoinsieme densi in X. Sono allora equivalenti:*

(a) $A_nx \to 0$ per $n \to +\infty$ e per ogni $x \in X$.

(b) $\sup_n \|A_n\| < +\infty$ e $A_nx \to 0$ per $n \to +\infty$ e per ogni $x \in D$.

Rimane quindi soltanto da dimostrare che gli operatori R_hK sono equilimitati.

Per $t \in (0,1/2)$, usando la disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned} |R_hKx(t)| &= \left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} x(s)\,ds\right| = \frac{1}{h}\int_0^h |x(t+s)|\,ds \\ &\le \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\int_0^h x^2(t+s)\,ds\right)^{1/2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} |R_hKx(t)|^2\,dt &\le \frac{1}{h}\int_0^{1/2}\int_0^h x^2(t+s)\,ds\,dt \\ &\le \frac{1}{h}\int_0^h\int_0^{1/2} x^2(t+s)\,dt\,ds \le \|x\|^2_{L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

da cui

$$\|R_hKx\|_{L^2(0,1)} \le \sqrt{2}\|x\|_{L^2(0,1)},$$

cioè

$$\|R_hK\| \le \sqrt{2}.$$

□

Osserviamo che se $y \in H^2(0,1)$ e $\|y''\|_{L^2} \le E$, e se $\|y - y^\varepsilon\|_{L^2} \le \varepsilon$, allora

$$\|R_hy^\varepsilon - y'\| \le \frac{\sqrt{6}}{h}\varepsilon + \frac{h}{\sqrt{2}}E$$

e la scelta $h(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{E}}$ risulta ottimale.

2.3 Filtri regolarizzanti

Dal teorema di Picard abbiamo visto che la soluzione x dell'equazione $Kx = y$ è data da

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_j} < y, f_j > e_j$$

se $y \in R(K)$, cioè se questa serie converge.

L'idea dei filtri regolarizzanti consiste nel costruire una regolarizzazione limitando l'influenza del fattore $1/\sigma_j$ soprattutto quando σ_j diventa piccolo.

Teorema 2.5 *Sia $K : X \to Y$ un operatore lineare compatto e iniettivo tra spazi di Hilbert e sia $\{\sigma_j, e_j, f_j\}_{j\in J}$ un sistema singolare per K. Sia $q : (0, +\infty) \times (0, \|K\|] \to \mathbf{R}$ un filtro regolarizzante per K, cioè una funzione con le seguenti proprietà:*

(1) $|q(\alpha, \sigma)| \leq 1$ *per ogni* $\alpha > 0$ *e* $0 < \sigma \leq \|K\|$.

(2) Per ogni $\alpha > 0$ esiste $c(\alpha)$ tale che

$$|q(\alpha, \sigma)| \leq c(\alpha)\sigma \quad \textit{per ogni} \quad 0 < \sigma \leq \|K\|.$$

(3a)

$$\lim_{\alpha\to 0} q(\alpha, \sigma) = 1 \quad \textit{per ogni} \quad 0 < \sigma \leq \|K\|.$$

Allora, l'operatore $R_\alpha : Y \to X$ definito per $\alpha > 0$ da

$$R_\alpha y = \sum_{j\in J} \frac{q(\alpha, \sigma_j)}{\sigma_j} < y, f_j > e_j$$

è una strategia di regolarizzazione con $\|R_\alpha\| \leq c(\alpha)$.

Una strategia $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ è ammissibile se, per $\varepsilon \to 0$, si ha $\alpha(\varepsilon) \to 0$ e $\varepsilon c(\alpha(\varepsilon)) \to 0$.

Dim. Consideriamo il caso $J = \mathbf{N}$. Il caso in cui J è finito è più semplice.

Calcoliamo

$$\|R_\alpha y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|q(\alpha, \sigma_j)|^2}{\sigma_j^2} < y, f_j >^2 \leq c(\alpha)^2 \sum_{j=1}^{\infty} < y, f_j >^2 \leq c(\alpha)^2 \|y\|^2,$$

da cui $\|R_\alpha\| \leq c(\alpha)$.

Sia x un elemento fissato in X. Dal momento che K è iniettivo

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} < x, e_j > e_j \quad \text{e} \quad Kx = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j < x, e_j > f_j,$$

quindi

$$\|R_\alpha Kx - x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} [q(\alpha, \sigma_j) - 1]^2 < x, e_j >^2 .$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} < x, e_j >^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Inoltre, esiste $\alpha_0 = \alpha(\varepsilon, N(\varepsilon))$ tale che, per $0 < \alpha < \alpha_0$,

$$[q(\alpha, \sigma_j) - 1]^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2} \quad \text{per} \quad j = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon).$$

Allora,

$$\begin{aligned} \|R_\alpha Kx - x\|^2 &= \sum_{j=1}^{N} [q(\alpha, \sigma_j) - 1]^2 < x, e_j >^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} [q(\alpha, \sigma_j) - 1]^2 < x, e_j >^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2\|x\|^2} \|x\|^2 + 4\frac{\varepsilon^2}{8} = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Inoltre, se $\|Kx - y^\varepsilon\| \leq \varepsilon$, allora

$$\|R_\alpha y^\varepsilon - x\| \leq \varepsilon c(\alpha) + \|R_\alpha Kx - x\|$$

e, siccome $\|R_\alpha Kx - x\| \to 0$ se $\alpha \to 0$, è sufficiente scegliere $\alpha(\varepsilon)$ in modo che, per ε che tende a zero, sia $\alpha(\varepsilon)$ che $\varepsilon c(\alpha(\varepsilon))$ tendano a zero. $\square$

Le ipotesi (1), (2) e (3a) sono sufficienti per garantire che R_α è una strategia di regolarizzazione. Se specifichiamo ulteriormente il modo in cui $q(\alpha, \sigma)$ tende ad 1 quando $\alpha \to 0$, si può stimare meglio la convergenza del metodo di regolarizzazione.

Teorema 2.6 *Supponiamo che K soddisfi tutte le ipotesi del teorema 2.5 e che $R(K)$ sia denso in Y. Supponiamo che q soddisfi le condizioni* (1) *e* (2)*.*

(i) se vale inoltre
(3b) *esiste una costante $c_1 > 0$ tale che*

$$|q(\alpha, \sigma) - 1| \leq \frac{c_1\sqrt{\alpha}}{\sigma} \quad \textit{per} \quad \alpha > 0,\ 0 < \sigma \leq \|K\|,$$

e se $x \in K^*(Y)$, allora

$$\|R_\alpha Kx - x\| \leq c_1\sqrt{\alpha}\|(K^*)^{-1}x\|.$$

(ii) se invece
(3c) *esiste una costante $c_2 > 0$ tale che*

$$|q(\alpha, \sigma) - 1| \leq \frac{c_2\alpha}{\sigma^2} \quad \textit{per} \quad \alpha > 0, 0 < \sigma \leq \|K\|,$$

e se $x \in K^*K(X)$, allora

$$\|R_\alpha Kx - x\| \leq c_2\alpha\|(K^*K)^{-1}x\|.$$

Vediamo qualche esempio di filtro regolarizzante.

Esempio 2.1 La funzione

$$q(\alpha, \sigma) = \frac{\sigma^2}{\alpha + \sigma^2}$$

soddisfa le ipotesi (1), (2) con $c(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, (3$a$), (3$b$) con $c_1 = 1/2$ e (3c) con $c_2 = 1$.

Per $x \in K^*(Y)$ si ha una strategia ottimale per $\alpha = \varepsilon/E$

Esempio 2.2 Fissato $a \in (0, 1/\|K\|^2)$, la funzione

$$q(\alpha, \sigma) = 1 - (1 - a\sigma^2)^{1/\alpha}$$

soddisfa le ipotesi (1), (2) con $c(\alpha) = \sqrt{\frac{a}{\alpha}}$, $(3a)$, $(3b)$ con $c_1 = 1/\sqrt{2a}$ e $(3c)$ con $c_2 = 1/a$.

Esempio 2.3 La funzione

$$q(\alpha, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \sigma^2 \geq \alpha, \\ 0 & \text{se} \quad \sigma^2 < \alpha, \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi (1), (2) con $c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $(3a)$, $(3b)$ con $c_1 = 1$ e $(3c)$ con $c_2 = 1$.

La regolarizzazione che si ottiene usando questo filtro si chiama *troncamento della decomposizione a valori singolari*, infatti in questo caso

$$R_\alpha y = \sum_{\sigma_j \geq \alpha} \frac{1}{\sigma_j} < y, f_j > e_j.$$

Anche questo filtro conduce a strategie di regolarizzazione ottimali.

2.4 Regolarizzazione secondo Tikhonov

Quando si ha un sistema lineare finito sovradeterminato della forma

$$Kx = y$$

un metodo comune per affrontarlo è quello di cercare di minimizzare lo scarto quadratico

$$\|Kx - y\|^2$$

al variare di x in X.

Se X ha dimensione infinita e K è un operatore compatto, si può impostare la stessa strategia, ma il problema di minimo che si ottiene risulta ancora mal posto.

Lemma 2.7 *Sia $K : X \to Y$ un operatore lineare limitato tra spazi di Hilbert e sia $y \in Y$.*

Esiste $\hat{x} \in X$ tale che

$$\|K\hat{x} - y\| \leq \|Kx - y\| \quad \textit{per ogni} \quad x \in X$$

se e solo se $\hat{x}$ risolve l'equazione normale

$$K^*K\hat{x} = Ky.$$

Minimizzare lo scarto equivale quindi a risolvere l'equazione normale che è una equazione di prima specie. Se K è compatto, K^*K è ancora compatto e risolvere l'equazione normale è un problema mal posto.

Dim. Con qualche passaggio, si dimostra che

$$\|Kx - y\|^2 - \|K\hat{x} - y\|^2 = \|Kx - K\hat{x}\|^2 + 2 < x - \hat{x}, K^*K\hat{x} - K^*y > .$$

Se $\hat{x}$ risolve l'equazione $K^*K\hat{x} = K^*y$, allora

$$\|Kx - y\|^2 \geq \|K\hat{x} - y\|^2$$

e $\hat{x}$ è un punto di minimo.

D'altra parte, se $\hat{x}$ è un punto di minimo, per ogni $t > 0$ e $z \in X$ si ha

$$0 \leq \|K(\hat{x} + tz) - y\|^2 - \|K\hat{x} - y\|^2 = t^2\|Kz\|^2 - 2t < z, K^*K\hat{x} - K^*y >,$$

da cui segue che

$$< z, K^*K\hat{x} - K^*y >= 0 \quad \text{per ogni} \quad z \in X$$

cioè $K^*K\hat{x} - K^*y = 0$. $\square$

Occorre quindi modificare il problema di minimo.

Dato $K : X \to Y$ operatore lineare limitato, $y \in Y$ e $\alpha > 0$, determinare $x^\alpha \in X$ che minimizza il *funzionale di Tikhonov*

$$J_\alpha(x) := \|Kx - y\|^2 + \alpha\|x\|^2$$

Teorema 2.8 *Il funzionale di Tikhonov J_α ha un unico minimo $x^\alpha \in X$. Tale minimo è soluzione dell'equazione normale*

$$\alpha x^\alpha + K^*Kx^\alpha = K^*y.$$

Dim. Sia x_n una successione minimizzante per J_α, cioè tale che

$$\lim_{n\to\infty} J_\alpha(x_n) = I := \inf_{x\in X} J_\alpha(x).$$

Facciamo vedere che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy.

Usando la relazione $\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|a - b\|^2$ si mostra che

$$J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) - 2J_\alpha(\frac{1}{2}(x_n + x_m)) = \frac{1}{2}\|Kx_n - Kx_m\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_m\|^2$$

e quindi

$$\frac{\alpha}{2}\|x_n - x_m\|^2 \leq J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) - 2I \to 0$$

quando $n, m \to \infty$.

Chiamiamo x^α il limite della successione x_n. Per la continuità dell'operatore di Tikhonov,

$$J_\alpha(x^\alpha) = J_\alpha(\lim_n x_n) = \lim_n J_\alpha(x_n) = I.$$

Mostriamo adesso che x^α risolve l'equazione normale. Si può procedere come nella dimostrazione del lemma, oppure si può osservare che, se x^α è un punto di minimo per J_α, allora

$$\frac{d}{dt}J_\alpha(x^\alpha + t)_{|t=0} = 0. \tag{1}$$

Calcoliamo allora

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_\alpha(x^\alpha + t) &= \frac{d}{dt}\left(\|K(x^\alpha + tz) - y\|^2 + \alpha\|x^\alpha + tz\|^2\right)\\ &= 2t\|Kz\|^2 + 2 < Kz, Kx^\alpha - y > +2\alpha t\|z\|^2 + 2\alpha < z, x^\alpha >,\end{aligned}$$

per cui la (1) diventa

$$< z, K^*Kx^\alpha - K^*y + \alpha x^\alpha >= 0 \quad \text{per ogni} \quad z \in X.$$

Rimane da dimostrare che la soluzione è unica. Supponiamo che esista un altro punto di minimo $\hat{x}$ che sarà ancora soluzione dell'equazione normale. Consideriamo $v = x^\alpha - \hat{x}$ che risulta soluzione di $\alpha v + K^*Kv = 0$. Ma K^*K è un operatore compatto autoaggiunto con autovalori tutti positivi (i suoi autovalori sono i quadrati dei valori singolari di K), quindi per $\alpha > 0$ l'unica soluzione di $\alpha v + K^*Kv = 0$ è quella identicamente nulla. □

Dato $y \in Y$ definiamo allora

$$R_\alpha y := x^\alpha$$

unico punto di minimo di J_α su X.

Vogliamo dimostrare che R_α, che si dice *regolarizzazione secondo Tikhonov* è una strategia di regolarizzazione.

Per farlo, usiamo la decomposizione a valori singolari. Vogliamo risolvere l'equazione normale. Scriviamo

$$x^\alpha = x_0 + \sum_{j \in J} x^j e_j,$$

dove $x_0 \in N(K)$. Allora,

$$K^*Kx^\alpha = \sum_{j \in J} \sigma_j^2 x^j e_j$$

e l'equazione diventa

$$\alpha \left(x_0 + \sum_{j \in J} x^j e_j \right) + K^*Kx^\alpha = \sum_{j \in J} \sigma_j^2 x^j e_j = \sum_{j \in J} \sigma_j < y, fj > e_j$$

dalla quale segue che $x_0 = 0$ e $x^j = \frac{\sigma_j}{\alpha + \sigma_j^2} < y, f_j >$, cioè

$$R_\alpha y = \sum_{j \in J} \frac{\sigma_j}{\alpha + \sigma_j^2} < y, f_j > e_j$$

che corrisponde alla regolarizzazione mediante il filtro dell'esempio 2.1.

Utilizzando quindi il risultato sui filtri regolarizzanti possiamo affermare che

Teorema 2.9 *Sia $K : X \to Y$ un operatore lineare compatto tra spazi di Hilbert e sia $\alpha > 0$.*

L'operatore $\alpha I + K^*K$ è invertibile con inverso limitato. Gli operatori

$$R_\alpha = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^* : Y \to X$$

formano una strategia di regolarizzazione con $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ che viene detta metodo di regolarizzazione di Tikhonov.

$R_\alpha y^\varepsilon$ si determina come l' unica soluzione $x^{\alpha,\varepsilon}$ dell'equazione del secondo tipo

$$\alpha x^{\alpha,\varepsilon} + K^*Kx^{\alpha,\varepsilon} = K^*y^\varepsilon.$$

Ogni scelta $\alpha(\varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$ con $\frac{\varepsilon^2}{\alpha(\varepsilon)} \to 0$ è ammissibile.

Osservazioni.

- $\alpha I + K^*K$ ha autovalori maggiori di α e quindi lontani da zero.
- La scelta di α ammissibile nel teorema precedente è fatta *a priori*, cioè prima di calcolare il punto di minimo x^α. Questa scelta è la migliore dal punto di vista teorico per studiare il comportamento asintotico dell'errore. Esistono metodi *a posteriori* nei quali la scelta delparametro di regolarizzazione viene effettuata contestualmente al calcolo del punto di minimo (ad esempio il *metodo di discrepanza di Morozov*).
- È possibile penalizzare il funzionale dei minimi quadrati con norme più forti. Ad esempio si può minimizzare

$$\|Kx - y\|^2 + \alpha \|x\|_1^2 \quad \text{su} \quad X_1.$$

Esercizio 2.1 *Si applichi il metodo di regolarizzazione di Tikhonov all'operatore*

$$K : L^2(0,1) \to L^2(0,1),$$

mostrando che, per $y \in H^1(0,1)$ *con* $y(0) = 0$*, il punto di minimo del funzionale di Tikhonov è la soluzione del problema differenziale*

$$\begin{cases} \alpha x''(t) - x(t) &= -y'(t) \quad \textit{in} \quad (0,1) \\ x'(0) &= 0 \\ x(1) &= 0. \end{cases}$$

Applicare questo risultato nel caso $y(t) = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n t}{2}$.