

# Stabilità per il problema di Cauchy

Elisa Francini e Sergio Vessella

## Sommario

<b>1</b>	<b>Qualche prerequisito</b>	<b>1</b>
1.1	Definizione degli spazi $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ con $k$ intero . . . . .	2
1.2	Teoremi di densità . . . . .	3
1.3	Lo spazio duale di $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	4
1.4	Teorema di Immersione di Sobolev . . . . .	4
1.5	Tracce . . . . .	5
1.6	Gli spazi $H_{co}^{1/2}(\Sigma)$ , $H_{co}^{3/2}(\Sigma)$ . . . . .	8
1.7	Lo spazio $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . . . . .	8
1.8	Teorema di Lax-Milgram e problema di Dirichlet . . . . .	8
1.9	Mappa Dirichlet a Neumann . . . . .	12
1.10	Risultati di regolarità . . . . .	16
<b>2</b>	<b>La disuguaglianza delle tre sfere per funzioni armoniche</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Stime di stabilità per il problema di Cauchy</b>	<b>24</b>
3.1	Stima della propagazione dell'errore . . . . .	25
3.2	Il problema di Cauchy . . . . .	28

## 1 Qualche prerequisito

In questo paragrafo riporteremo:

(i) le definizioni e le proprietà degli spazi di Sobolev che ci occorreranno in seguito (paragrafi 1.1 - 1.6). I Teoremi sono dati senza le dimostrazioni. Chi desidera approfondire gli argomenti trattati nei paragrafi 1.1 - 1.4 può consultare [Ev, Cap. 5] e [Br, Cap. 8, 9], mentre per i paragrafi 1.5 - 1.7 può consultare [Ne, Cap. 1, 2] e [K-J-F, Cap. 6];

(ii) il Teorema di Lax Milgram con le applicazioni al problema di Dirichlet per l'equazione  $\operatorname{div}(\gamma\nabla u) = -F$  (paragrafo 1.8). Una dimostrazione del teorema di Lax Milgram si trova in [Ev, Cap. 6] e [Br, Cap. 8, 9];

(iii) la definizione della Mappa Dirichlet a Neumann (paragrafo 1.9);

(iv) i risultati di regolarità l'equazione  $\operatorname{div}(\gamma\nabla u) = -F$  (paragrafo 1.10). Per approfondimenti si può consultare [Ev, Cap. 6] e [Br, Cap. 8, 9].

Cominciamo a introdurre alcune notazioni. Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  è un punto di  $\mathbb{R}^n$  indicheremo con  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$  e scriveremo anche  $x = (x', x_n)$ . Se  $r > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ) indicheremo con  $B_r(x)$  ( $B_r'(x')$ ) la palla aperta di

$\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^{n-1}$ ) di centro  $x$  ( $x'$ ) e raggio  $r$ . Scriveremo anche  $B_r$  ( $B'_r$ ) invece di  $B_r(0)$  ( $B'_r(0)$ ). Siano  $r, M > 0$  indicheremo con  $Q_{r,M} = B'_r \times (-Mr, Mr)$  e diremo che  $0$  è il centro del cilindro  $Q_{r,M}$ . Se  $\mu$  è un vettore non nullo di  $\mathbb{R}^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  indicheremo con  $Q_{r,M}^{(\mu)}(x)$  il cilindro isometrico con asse di simmetria parallelo a  $\mu$ , centro in  $x \in \mathbb{R}^n$  e isometrico a  $Q_{r,M}$ .

Nel seguito utilizzeremo la lettera  $C$  per indicare una costante positiva. Si avverte che il valore delle costanti potrà cambiare da riga a riga, ma generalmente indicheremo da quali grandezze dipendono le varie costanti. Tuttavia a volte per poter seguire meglio i vari passaggi metteremo un indice o un segno a  $C$  e scriveremo  $C_0, C_1, \bar{C}, \check{C} \dots$ . Generalmente ometteremo la dipendenza delle costanti da  $n$ .

Nel seguito  $\Omega$  indicherà sempre un **insieme aperto connesso e limitato** di  $\mathbb{R}^n$

## 1.1 Definizione degli spazi $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ con $k$ intero

Diamo la definizione di derivata debole.

**Definizione 1.1.** Sia  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  e  $\alpha$  un multiindice. Diremo che  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$  è la derivata debole di ordine  $\alpha$  di  $u$  se

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \quad (1.1)$$

e scriveremo  $v = D^{\alpha}u$ .

Si può dimostrare che la derivata debole  $D^{\alpha}u$  è univocamente determinata a meno di un insieme di misura (di Lebesgue) nulla e che se  $\nabla u = 0$  allora  $u$  è costante in  $\Omega$ . La Definizione 1.1 è giustificata dalla formula di integrazione per parti che, nel caso in cui  $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ , fornisce proprio la derivata  $D^{\alpha}u$  in senso classico.

Sia  $k \in \mathbb{N}$ , definiamo lo **spazio di Sobolev**  $H^k(\Omega)$  come

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^2(\Omega) \text{ per ogni } |\alpha| \leq k\}, \quad (1.2)$$

in (1.2)  $D^{\alpha}u$  è la derivata debole di ordine  $\alpha$  di  $u$ . Evidentemente  $H^k(\Omega)$  è uno spazio vettoriale. Inoltre colla norma

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^{\alpha}u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.3)$$

$H^k(\Omega)$  risulta essere uno spazio di Banach separabile o, più precisamente, uno spazio di Hilbert. Infatti si osservi che la norma definita in (1.3) è indotta dal prodotto scalare

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^{\alpha}u D^{\alpha}v dx \text{ per ogni } u, v \in H^k(\Omega). \quad (1.4)$$

Indicheremo con  $H_0^k(\Omega)$  la chiusura di  $C_0^{\infty}(\Omega)$  in  $H^k(\Omega)$ . Intuitivamente, una funzione  $u$  appartiene allo spazio  $H_0^k(\Omega)$  se le sue derivate  $D^{\alpha}u$ , per  $|\alpha| \leq k-1$

sono "nulle" su  $\partial\Omega$ , questo sarà chiarito meglio in seguito quando introdurremo la nozione di traccia di  $u \in H^k(\Omega)$ . Si tenga presente che se  $k > 1$  non accade che  $H_0^k(\Omega) = H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .

Nel seguito avremo bisogno della seguente proposizione (la cui dimostrazione è, peraltro, immediata)

**Proposizione 1.2.** *Siano  $\Omega$  e  $\tilde{\Omega}$  aperti limitati di  $\mathbb{R}$  tali che  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$  e sia  $u \in H_0^k(\Omega)$ .*

*Posto*

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{in } \Omega, \\ 0 & \text{in } \tilde{\Omega} \setminus \Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

*risulta  $\tilde{u} \in H_0^k(\tilde{\Omega})$ .*

Ricordiamo la seguente **disuguaglianza di Poincaré**

**Teorema 1.3.** *Sia  $u \in H_0^1(\Omega)$  allora*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \text{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.6)$$

*dove  $C$  è una costante che dipende solo da  $n$  e  $\text{diam}(\Omega)$  è il diametro di  $\Omega$ .*

Il Teorema 1.3 implica che in  $H_0^1(\Omega)$ ,  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  e  $\|u\|_{H^1(\Omega)}$  sono due norme equivalenti.

## 1.2 Teoremi di densità

Vale il seguente

**Teorema 1.4 (1° teorema di densità).**  *$C^\infty(\Omega) \cap H^k(\Omega)$  è denso in  $H^k(\Omega)$ .*

Se  $\Omega$  è arbitrario non è detto che  $C^\infty(\bar{\Omega})$  sia denso in  $H^k(\Omega)$ . Affinché questo accada occorre che (la frontiera di)  $\Omega$  abbia una certa regolarità. Per i nostri scopi è sufficiente che  $\Omega$  sia **di classe  $C^k$**  (in realtà basta  $k = 1$ ). Con questo intendiamo dire che esistano  $r > 0$  e  $M > 0$  tali che per ogni punto  $p \in \partial\Omega$ , esista una trasformazione rigida (un'isometria di  $\mathbb{R}^n$ ) delle coordinate che mandi  $p$  in 0 ed esista  $g \in C^k(\bar{B}_r')$  che soddisfi

$$\|\nabla_{x'} g\|_{L^\infty(\bar{B}_r')} < M, \quad (1.7)$$

$$g(0) = |\nabla_{x'} g(0)| = 0 \quad (1.8)$$

e si abbia

$$\Omega \cap Q_{r,M} = \{(x', x_n) \in Q_{r,M} : g(x') < x_n\}, \quad (1.9)$$

ricordiamo che  $Q_r = B_r' \times (-Mr, Mr)$  (si osservi che il grafico di  $g$  interseca solo la "superficie laterale" del cilindro  $Q_{r,M}$ ). A volte diremo anche che  $\Omega$  è un aperto di classe  $C^k$  con costanti  $r, M$ .

**Teorema 1.5 (2° teorema di densità).** *Se  $\Omega$  è un aperto di classe  $C^1$  allora  $C^\infty(\bar{\Omega})$  è denso in  $H^k(\Omega)$ .*

### 1.3 Lo spazio duale di $H_0^1(\Omega)$

Lo spazio duale di  $H_0^1(\Omega)$  (cioè lo spazio dei funzionali lineari e continui da  $H_0^1(\Omega)$  in  $\mathbb{R}$ ) si indica con  $H^{-1}(\Omega)$ . Se  $F \in H^{-1}(\Omega)$  si pone:

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \left\{ F(v) : v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Si può **caratterizzare**  $H^{-1}(\Omega)$  nel modo seguente:

$F \in H^{-1}(\Omega)$  se e solo se esistono  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n \in L^2(\Omega)$  tali che

$$F(v) = \int_{\Omega} \phi_0 v dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \phi_j v_{x_j} dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.10)$$

Si tenga presente che  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$  non sono univocamente determinate. Inoltre risulta

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |\phi_j|^2 dx : F \text{ soddisfa (1.10) per } \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Si scrive anche

$$F = \phi_0 - \sum_{j=1}^n (\phi_j)_{x_j}.$$

Se  $\phi_1, \dots, \phi_n = 0$  identificheremo senz'altro il funzionale

$$F(v) = \int_{\Omega} \phi_0 v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

con  $\phi_0$  e scriveremo  $F \in L^2(\Omega)$ . Analogamente, se  $\phi_0 \in H^k(\Omega)$ , scriveremo  $F \in H^k(\Omega)$ .

### 1.4 Teorema di Immersione di Sobolev

Vale il seguente

**Teorema 1.6 (Teorema di immersione di Sobolev).** *Sia  $\Omega$  un aperto di classe  $C^1$  e sia  $u \in H^k(\Omega)$ .*

(i) Se

$$k < \frac{n}{2}, \quad (1.11)$$

allora  $u \in L^q(\Omega)$  dove

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n}. \quad (1.12)$$

Inoltre

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}, \quad (1.13)$$

dove  $C$  dipende solo da  $k, n$  e  $\Omega$ .

(ii) Se

$$k > \frac{n}{2}, \quad (1.14)$$

allora  $u \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$  dove  $m = k - [\frac{n}{2}] - 1$  e

$$\alpha = \begin{cases} [\frac{n}{2}] + 1 - \frac{n}{2}, & \text{se } \frac{n}{2} \text{ non è intero,} \\ \text{qualsiasi numero positivo se } \alpha < 1, & \text{se } \frac{n}{2} \text{ è intero.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Inoltre

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}, \quad (1.16)$$

dove  $C$  dipende solo da  $k, n$  e  $\Omega$ .

### Esempi.

Se  $n = 1$  e  $u \in H^1(0, 1)$  allora  $u \in C^{0,1/2}([0, 1])$ . Se  $n = 2$  e  $u \in H^1(\Omega)$  allora  $u \in L^q(\Omega)$  per ogni  $1 \leq q < \infty$  e se  $u \in H^2(\Omega)$  allora  $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  per ogni  $\alpha < 1$ . Infine, se  $u \in H^k(\Omega)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  allora  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ .

## 1.5 Tracce

Se  $u \in H^k(\Omega)$  vogliamo dare un senso alla restrizione di  $u$  su  $\partial\Omega$  che coincida con la definizione classica.

Iniziamo a definire gli spazi  $L^2(\partial\Omega)$  e  $H^k(\partial\Omega)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Supponiamo che  $\Omega$  sia di classe  $C^1$  con costanti  $r, M$  allora possiamo ricoprire  $\partial\Omega$  con un numero finito,  $N$ , di cilindri  $Q_{r,M}^{(\nu_i)}(p_i)$ ,  $i = 1 \dots, N$ , con  $p_i \in \partial\Omega$  e  $\nu_i$  vettore normale esterno a  $\partial\Omega$  in  $p_i$  che soddisfino quanto segue:  $\Sigma_i := Q_{r,M}^{(\nu_i)}(p_i) \cap \partial\Omega$ , per  $i = 1 \dots, N$ , a meno di una isometria che mandi  $p_i$  in 0 (per ogni fissato  $i$ ), sia il grafico di una funzione  $g_i \in C^1(\overline{B'_r}(0))$  che soddisfi a (1.7) - (1.9). Si dice che  $f \in L^2(\Sigma_i)$  se  $f(x', g_i(x'))$  appartiene a  $L^2(B'_r(0))$  e si dice che  $f \in L^2(\partial\Omega)$  se  $f|_{\Sigma_i} \in L^2(\Sigma_i)$  per ogni  $i = 1 \dots, N$ .

Se  $f \in L^2(\partial\Omega)$  si pone

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Sigma_i} f^2 dS \right)^{1/2}. \quad (1.17)$$

È evidente che la norma così definita dipende dalla scelta dei cilindri  $Q_{r,M}^{(\nu_i)}(p_i)$ , ma tali norme risultano tutte equivalenti. Tutte le volte che considereremo la norma  $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$  presupporremo sempre fissata la famiglia finita dei cilindri  $Q_{r,M}^{(\nu_i)}(p_i)$  che ricoprono  $\partial\Omega$ . Lo spazio  $L^2(\partial\Omega)$  risulta uno spazio di Banach, più precisamente, uno spazio di Hilbert separabile.

Per lo spazio  $H^k(\partial\Omega)$  si procede in modo analogo. Supponiamo che  $\Omega$  sia di classe  $C^k$ , diremo che  $f \in H^k(\partial\Omega)$  se le funzioni  $f(x', g_i(x'))$  appartengono a  $H^k(B'_r(0))$  e poniamo

$$\|f\|_{H^k(\partial\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^N (\|f\|_{H^k(\Sigma_i)}^2) \right)^{1/2}, \quad (1.18)$$

dove

$$\|f\|_{H^k(\Sigma_i)} = \|f(\cdot, g_i(\cdot))\|_{H^k(B_r(0))}.$$

Per la norma  $\|\cdot\|_{H^k(\partial\Omega)}$  valgono le stesse considerazioni svolte per la norma  $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$ . Inoltre  $H^k(\partial\Omega)$  risulta essere uno spazio di Hilbert separabile.

Si può dimostrare il seguente

**Teorema 1.7 (teorema di traccia).** *Sia  $\Omega$  un aperto di classe  $C^1$ . Allora esiste un operatore lineare e continuo*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

tale che:

$$(i) \quad \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \text{ per ogni } u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$$

e

$$(ii)$$

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Se  $u \in H^1(\Omega)$  chiameremo  $\gamma_0(u)$  la **traccia** di  $u$  su  $\partial\Omega$ . Quando non si corre il rischio di ambiguità scriveremo  $u|_{\partial\Omega}$  per indicare  $\gamma_0(u)$ . Si pone

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega)).$$

Si dimostra che  $H^1(\partial\Omega) \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

Su  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  si può definire la seguente norma. Per  $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  poniamo

$$\|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \left( \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (1.19)$$

dove

$$\|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \left( \int_{\partial\Omega} dy \int_{\partial\Omega} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|^2}{|x - y|^n} dx \right)^{1/2}. \quad (1.20)$$

Lo spazio  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  con la norma definita in (1.19) risulta essere uno spazio di Hilbert. Inoltre esiste una costante  $C$  dipendente solo da  $\Omega$  tale che

$$\|\gamma_0(u)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (1.21)$$

Come avevamo anticipato, vale la seguente caratterizzazione delle funzioni a traccia nulla

**Teorema 1.8 (caratterizzazione delle funzioni a traccia nulla).** *Sia  $\Omega$  come nel Teorema 1.7. Se  $u \in H^1(\Omega)$  allora*

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{se e solo se} \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.22)$$

Quindi, affermare che due funzioni  $u, v$  appartenenti a  $H^1(\Omega)$  hanno la stessa traccia su  $\partial\Omega$  può essere espresso in modo equivalente da  $u - v \in H_0^1(\Omega)$ .

L'operatore di traccia  $\gamma_0$  è suriettivo su  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  (per come è definito  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ ), ma non è iniettivo. Tuttavia si può costruire una sorta di inversa di  $\gamma_0$ .

Precisamente vale il seguente

**Teorema 1.9.** *Sia  $\Omega$  un'aperto di classe  $C^1$ . Allora esiste un operatore lineare e continuo*

$$Z : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$$

*tale che*

$$\gamma_0(Z(\psi)) = \psi \quad \forall \psi \in H^{1/2}(\partial\Omega). \quad (1.23)$$

Si tenga presente che la continuità dell'operatore  $Z$  garantisce che per ogni  $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ , posto  $u = Z(\psi)$  si abbia

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad (1.24)$$

dove  $C$  è una costante che dipende da  $\Omega$ .

In generale, per  $k \geq 1$ , e  $\Omega$  aperto di classe  $C^k$ , si pone

$$H^{k-1/2}(\partial\Omega) := \gamma_0(H^k(\Omega)).$$

In seguito ci interesseranno solo i casi  $k = 1, 2$ .

Se  $u \in H^2(\Omega)$  allora  $\frac{\partial u}{\partial x_k} \in H^1(\Omega)$  per  $k = 1, \dots, n$  pertanto  $\frac{\partial u}{\partial x_k}|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Inoltre, risulta

$$H^2(\partial\Omega) \subset H^{3/2}(\partial\Omega) \subset H^1(\partial\Omega).$$

In modo simile a quanto fatto per  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  si può definire anche su  $H^{3/2}(\partial\Omega)$  una norma che renda completo questo spazio, tale norma è indicata con  $\|\cdot\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$ , omettiamo l'espressione esplicita di questa norma. Se  $u \in H^2(\Omega)$  possiamo quindi definire  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$  su  $\partial\Omega$  e risulta

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^2(\Omega), \quad (1.25)$$

dove  $C$  dipende solo da  $\Omega$ .

Si può dimostrare il seguente Teorema (analogo al Teorema 1.8).

**Teorema 1.10.** *Sia  $\Omega$  di classe  $C^2$ . Se  $u \in H^2(\Omega)$  allora*

$$u \in H_0^2(\Omega) \quad \text{se e solo se} \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega. \quad (1.26)$$

Il Teorema 1.9 si può generalizzare nel modo seguente

**Teorema 1.11.** *Sia  $\Omega$  di classe  $C^2$ . Allora per ogni*

$$(\psi_0, \psi_1) \in H^{3/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$$

*esiste  $u \in H^2(\Omega)$  tale che*

$$u|_{\partial\Omega} = \psi_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi_1 \quad \text{su} \quad \partial\Omega$$

*e*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left( \|\psi_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} + \|\psi_1\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right),$$

*dove  $C$  dipende solo da  $\Omega$ .*

## 1.6 Gli spazi $H_{co}^{1/2}(\Sigma)$ , $H_{co}^{3/2}(\Sigma)$

Ricordiamo che per una funzione  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  il supporto può essere definito come il complementare dell'insieme dei punti  $x \in \mathbb{R}^n$  per i quali esista un  $r > 0$  tale che  $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi dx = 0$  per ogni  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  con  $\text{supp } \varphi \subset B_r(x)$ .

Siano  $k = 1, 2$ ,  $\Omega$  un aperto di classe  $C^k$  e sia  $\Sigma$  una porzione di  $\partial\Omega$  che, a meno di isometrie, risulti il grafico di una funzione  $C^k$ . Data una funzione  $f$  definita su  $\Omega$  indichiamo con  $\tilde{f}$  l'estensione a zero di  $f$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ . Diremo che  $f \in H^k(\Omega \cup \Sigma)$  se  $f \in H^k(\Omega)$  e  $\text{supp } \tilde{f} \subset \Omega \cup \Sigma$  e indicheremo con  $H_{co}^{k-1/2}(\Sigma)$  l'insieme delle tracce delle funzioni di  $H^k(\Omega \cup \Sigma)$ .

Se abbiamo un grafico  $\Sigma$  di una funzione di classe  $C^k$  possiamo sempre considerare  $\Sigma$  come una porzione della frontiera di un aperto  $\Omega$  di classe  $C^k$ , poiché lo spazio  $H_{co}^{k-1/2}(\Sigma)$  non dipende da  $\Omega$ , considereremo lo spazio  $H_{co}^{k-1/2}(\Sigma)$  senza specificare  $\Omega$ .

## 1.7 Lo spazio $H^{-1/2}(\partial\Omega)$

Sia  $\Omega$  di classe  $C^1$ . Indicheremo con  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  il duale di  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Quindi  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  è lo spazio dei funzionali  $\Phi : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  lineari e tali che esista una costante  $C$  tale che

$$|\Phi(\psi)| \leq C \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad \text{per ogni } \psi \in H^{1/2}(\partial\Omega). \quad (1.27)$$

Indicheremo con  $\|\Phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$  la norma di  $\Phi$  in  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  ovvero l'estremo inferiore delle  $C$  che soddisfano (1.27).

## 1.8 Teorema di Lax-Milgram e problema di Dirichlet

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert, indichiamo con  $\|\cdot\|$  la norma su  $H$  e con  $H'$  il suo duale.

Sia

$$a : H \times H \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.28)$$

una forma bilineare. Diremo che  $a$  è **continua** se esiste  $C$  tale che

$$|a(u, \varphi)| \leq C \|u\| \|\varphi\| \quad \text{per ogni } u, \varphi \in H. \quad (1.29)$$

Diremo che la forma bilineare  $a$  è **coerciva** (o **coercitiva**) se esiste  $\alpha > 0$  tale che

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) \quad \text{per ogni } u \in H. \quad (1.30)$$

Vale il seguente teorema

**Teorema 1.12 (Lax-Milgram).** *Sia  $a$  una forma bilineare continua e coerciva e sia  $F \in H'$ . Allora esiste una ed una sola  $u \in H$  tale che*

$$a(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \text{per ogni } \varphi \in H. \quad (1.31)$$



Inoltre

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'}, \quad (1.32)$$

dove  $\|\cdot\|_{H'}$  indica la norma su  $H'$ .

Per fornire un'applicazione del Teorema di Lax-Milgram dobbiamo dire cosa intendiamo per **formulazione variazionale** del problema di Dirichlet. Cominciamo dal caso in cui la **condizione al bordo sia omogenea**.

Sia  $\gamma \in L^\infty(\Omega)$  tale che

$$\lambda^{-1} \leq \gamma(x) \leq \lambda \quad \text{q.o. in } \Omega, \quad (1.33)$$

dove  $\lambda \geq 1$  è un numero assegnato.

Sia  $F \in H^{-1}(\Omega)$ .

Formalmente il problema di Dirichlet per l'operatore  $\text{div}(\gamma \nabla(\cdot))$  con condizioni al bordo omogenee si scrive

$$\begin{cases} \text{div}(\gamma \nabla u) = -F, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.34)$$

La formulazione variazionale del problema (1.34) è la seguente:

Determinare  $u$  tale che

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = F(\varphi), & \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.35)$$

Si osservi che se  $\Omega$  è un aperto di classe  $C^1$ ,  $\gamma \in C^1(\overline{\Omega})$  e  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  con  $u|_{\partial\Omega} = 0$  e  $F \in C^0(\overline{\Omega})$  allora (1.34) e (1.35) sono equivalenti. Infatti, sotto queste ipotesi, abbiamo dal teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} \text{div}(\gamma \nabla u) \varphi dx = - \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.36)$$

Perciò se vale (1.34) abbiamo (1.35) (tener presente il Teorema 1.8 e che, per definizione,  $C_0^\infty(\Omega)$  è denso in  $H_0^1(\Omega)$ ). Viceversa, se vale (1.35), dal Teorema 1.7 abbiamo  $u|_{\partial\Omega} = 0$  e da (1.35) abbiamo

$$\int_{\Omega} (\text{div}(\gamma \nabla u) + F) \varphi dx = 0, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.37)$$

da cui segue la (1.34). Naturalmente nelle ipotesi iniziali su  $\Omega$ ,  $\gamma$  e  $F$  la formulazione (1.34) non ha senso, mentre la formulazione (1.35) ha perfettamente senso e il Teorema di Lax-Milgram ci dirà facilmente che è un problema ben posto.

Sia, infatti,  $H = H_0^1(\Omega)$  e

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \quad \text{per ogni } u, \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.38)$$

(1.38) risulta una forma bilineare, inoltre dalla disuguaglianza di Schwarz e da (1.33) si ha

$$|a(u, \varphi)| \leq \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla \varphi| dx \leq \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

(abbiamo indicato  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  con  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ ) e

$$\lambda^{-1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \gamma |\nabla u|^2 dx = a(u, u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ora ricordando che  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$   $\|u\|_{H^1(\Omega)}$  sono norme equivalenti su  $H_0^1(\Omega)$  non ci resta che applicare il Teorema di Lax-Milgram e concludere che il problema (1.35) ha un'unica soluzione in  $u \in H_0^1(\Omega)$  e si ha

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (1.39)$$

La (1.39), insieme all'esistenza e all'unicità già asserite, implica che il problema (1.35) è ben posto in  $H_0^1(\Omega)$ .

Ora consideriamo il caso in cui la condizione al bordo **non sia omogenea**, ma l'equazione sia omogenea.

Sia  $\Omega$  un aperto di classe  $C^1$ , sia  $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  e supponiamo che sia soddisfatta la (1.33). Formalmente il problema si scrive

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0, & \text{in } \Omega \\ u = \psi, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.40)$$

Abbiamo già visto qual è la formulazione variazionale di (1.40) nel caso  $\psi = 0$  e dall'esame di questo caso si ha che il problema (1.40) ha al più una soluzione in  $H^1(\Omega)$ . Ora vogliamo fornire la formulazione variazionale del problema (1.40) e dimostrare l'esistenza in  $H^1(\Omega)$ .

La formulazione variazionale di (1.40) si scrive

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0, & \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ u = \psi & \text{(nel senso delle tracce)}. \end{cases} \quad (1.41)$$

Si osservi che, nel caso in cui  $\gamma$  e  $u$  siano sufficientemente regolari, la prima equazione in (1.41) è equivalente alla prima equazione di (1.40).

Per risolvere (1.40) ((1.41)) procediamo nel modo seguente. Sia  $\Psi \in H^1(\Omega)$  tale che  $\Psi|_{\partial\Omega} = \psi$  nel senso delle tracce e supponiamo che (in virtù del Teorema 1.9)

$$\|\Psi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad (1.42)$$

dove  $C$  è costante che dipende solo da  $\Omega$ . Poniamo  $w = u - \Psi$ . Poiché  $u$  e  $\Psi$  hanno la stessa traccia su  $\partial\Omega$  si ha  $w|_{\partial\Omega} = 0$  e il problema (1.40) si può scrivere (formalmente),

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla w) = -\operatorname{div}(\gamma \nabla \Psi), & \text{in } \Omega, \\ w = 0, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.43)$$

mentre in forma variazionale si scrive

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \gamma \nabla w \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} \gamma \nabla \Psi \cdot \nabla \varphi dx, & \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.44)$$

Si noti che la forma bilineare è data da (1.38). La soluzione del problema (1.40) ((1.41)) sarà data da

$$u = w + \Psi \in H^1(\Omega) \quad (1.45)$$

Si osservi che, posto

$$F(\varphi) = - \int_{\Omega} \gamma \nabla \Psi \cdot \nabla \varphi dx, \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (1.46)$$

risulta  $F \in H^{-1}(\Omega)$ . Infatti applicando la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$|F(\varphi)| \leq \lambda \|\nabla \Psi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.47)$$

Da (1.42) e (1.43) abbiamo che

$$|F(\varphi)| \leq C\lambda \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.48)$$

In definitiva  $F \in H^{-1}(\Omega)$  e vale la disuguaglianza

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C' \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad (1.49)$$

dove  $C'$  dipende da  $\Omega$  e da  $\lambda$ .

Ora applicando il Teorema di Lax-Milgram si ha che il problema (1.44) ha una ed una sola soluzione  $w \in H_0^1(\Omega)$ , inoltre dalla (1.32) si ha

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \lambda C' \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (1.50)$$

Ora usando la nuovamente la (1.42) e poi (1.45), (1.50) abbiamo

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|w\|_{H^1(\Omega)} + \|\Psi\|_{H^1(\Omega)} \leq C'' \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad (1.51)$$

dove  $C''$  dipende da  $\lambda$  e  $\Omega$ . Si osservi che la (1.51) implica, in particolare, l'unicità per il problema (1.40).

Da quanto stabilito fin qui abbiamo il seguente

**Teorema 1.13.** *Sia  $\Omega$  un aperto di classe  $C^1$ . Supponiamo che  $\gamma \in L^\infty(\Omega)$  soddisfi (1.33). Sia  $F \in H^{-1}(\Omega)$  e  $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ .*

*Allora il problema*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = -F, & \text{in } \Omega, \\ u = \psi, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.52)$$

*la cui forma variazionale è*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = F(\varphi), & \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ u = \psi & \text{(nel senso delle tracce),} \end{cases} \quad (1.53)$$

*ammette una ed una sola soluzione  $u \in H^1(\Omega)$  e si ha*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right), \quad (1.54)$$

*dove  $C$  dipende solo da  $\lambda$  e  $\Omega$*

**Dimostrazione.**

Dal carattere lineare del problema (1.52) segue immediatamente l'unicità in  $H^1(\Omega)$ . Inoltre siano  $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$  soluzioni, rispettivamente, di

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u_1) = -F, & \text{in } \Omega \\ u_1 = 0, & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.55)$$

e

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u_2) = 0, & \text{in } \Omega \\ u_2 = \psi, & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.56)$$

Allora  $u = u_1 + u_2$  risulta l'unica soluzione in  $H^1(\Omega)$  e da (1.39) (1.51) segue immediatamente (1.54).  $\square$

**1.9 Mappa Dirichlet a Neumann**

Sia  $\Omega$  un aperto di classe  $C^1$  sia  $\gamma \in L^\infty(\Omega)$  e supponiamo che sia soddisfatta la (1.33). In termini formali la mappa Dirichlet a Neumann si costruisce nel modo seguente: sia  $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  e sia  $u \in H^1(\Omega)$  la soluzione del problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = \psi, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.57)$$

Abbiamo appena visto che la  $u$  è univocamente determinata da  $\psi$  quindi *se avesse un senso* potremmo definire una mappa (che chiameremo mappa Dirichlet a Neumann)

$$\psi \rightarrow \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad (\text{derivata conormale di } u). \quad (1.58)$$

Osserviamo che se  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  e  $\gamma \in C^1(\bar{\Omega})$  da (1.57) abbiamo

$$\int_{\partial\Omega} \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi dS = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (1.59)$$

Infatti se  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ , dal il teorema della divergenza e da (1.57) abbiamo

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\varphi \gamma \nabla u) - \operatorname{div}(\gamma \nabla u) \varphi) dx = \int_{\partial\Omega} \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi.$$

La (1.59) consente di "leggere" la  $\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}$  mediante l'integrale a secondo membro. Ora, quando  $\gamma \in L^\infty(\Omega)$  e  $u \in H^1(\Omega)$  l'integrale a secondo membro di (1.59) ha perfettamente senso. Sulla base di queste osservazioni definiremo qui di seguito  $\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}$  come elemento di  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  (il duale di  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ ).

Cominciamo a osservare che

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0, \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.60)$$

Infatti da (1.44) e (1.45) abbiamo, per  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \{\gamma \nabla \Psi \cdot \nabla \varphi + \gamma \nabla w \cdot \nabla \varphi\} dx = 0.$$

Da (1.60), ricordando il Teorema 1.8, segue che se  $\varphi \in H^1(\Omega)$  allora l'integrale

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \quad (1.61)$$

dipende solo dalla traccia di  $\varphi$  su  $\partial\Omega$ . Infatti se  $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$  hanno la stessa traccia su  $\partial\Omega$  allora  $\varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$  e quindi (1.60) implica

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi_1 dx = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi_2 dx.$$

Quindi, per ogni  $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  risulta definito il funzionale

$$L_{\psi} : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

che manda  $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  nel numero reale

$$L_{\psi}(\phi) = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx$$

dove  $\varphi|_{\partial\Omega} = \phi$  (nel senso delle tracce).

**Dimostriamo che il funzionale  $L_{\psi}$  è continuo.**

Sia  $\phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ , dal Teorema 1.9 sappiamo che esiste  $\varphi \in H^1(\Omega)$  tale che  $\varphi|_{\partial\Omega} = \phi$  (nel senso delle tracce) tale che

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad (1.62)$$

dove  $C$  è una costante che dipende da  $\Omega$ . Procedendo in modo simile a quanto fatto per stabilire la (1.49) e tenendo presente la (1.51), abbiamo che

$$\begin{aligned} |L_{\psi}(\phi)| &= \left| \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \right| \\ &\leq \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C} \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \end{aligned} \quad (1.63)$$

dove  $\bar{C}$  è una costante che dipende solo da  $\Omega$  e da  $\lambda$ . Pertanto il funzionale  $L_{\psi}$  è continuo e risulta

$$\|L_{\psi}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \bar{C} \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (1.64)$$

Si osservi anche che

$$H^{1/2}(\partial\Omega) \ni \psi \rightarrow L_{\psi} \in H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

è lineare e continuo.

A questo punto possiamo porre

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} := L_{\psi}$$

e di conseguenza scriviamo, per  $\varphi \in H^1(\Omega)$  tale che  $\varphi|_{\partial\Omega} = \phi$

$$\left\langle \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}, \phi \right\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = L_{\psi} = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad (1.65)$$

con  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$  si è indicato il prodotto scalare nella dualità  $H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)$ ; colle notazioni fin qui usate avremmo dovuto scrivere  $\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(\phi)$  invece di  $\langle \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}, \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$ , ma la seconda notazione è più manegevole in questo contesto.

Possiamo definire la **mappa Dirichlet a Neumann** come

$$\Lambda_\gamma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \Lambda_\gamma(\psi) = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}. \quad (1.66)$$

Dalla (1.64) segue che  $\Lambda_\gamma \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))$ , dove con  $\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))$  si indica lo spazio degli operatori lineari e continui da  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  a  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Dalla costruzione fatta si ha che

$$\langle \Lambda_\gamma(\psi), \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx, \quad \text{per ogni } \psi, \phi \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad (1.67)$$

dove  $u \in H^1(\Omega)$  è la soluzione di (1.57) e  $\varphi$  è una qualsiasi funzione di  $H^1(\Omega)$  tale che  $\varphi|_{\partial\Omega} = \phi$ . Si verifica facilmente che

$$\|\Lambda_\gamma\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}, H^{-1/2})} = \sup \left\{ \langle \Lambda_\gamma(\psi), \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} : \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq 1, \|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Stabiliamo altre semplici, ma importanti proprietà di  $\Lambda_\gamma$ .

Prima di tutto osserviamo che, dal momento che l'integrale a destra in (1.67) è indipendente dalla scelta di  $\varphi$  purché traccia di  $\phi$ , possiamo scegliere  $\varphi = v$  dove  $v \in H^1(\Omega)$  è la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla v) = 0, & \text{in } \Omega, \\ v = \phi, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.68)$$

Da ciò segue che la forma bilineare

$$H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega) \ni (\psi, \phi) \rightarrow \langle \Lambda_\gamma(\psi), \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} \in \mathbb{R}$$

è simmetrica ovvero

$$\langle \Lambda_\gamma(\psi), \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \langle \Lambda_\gamma(\phi), \psi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}, \quad \text{per ogni } \psi, \phi \in H^{1/2}(\partial\Omega). \quad (1.69)$$

Infatti

$$\langle \Lambda_\gamma(\psi), \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \gamma \nabla v \cdot \nabla u dx = \langle \Lambda_\gamma(\phi), \psi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}.$$

Un'importante conseguenza di (1.69) è la seguente

**Proposizione 1.14 (Identità di Alessandrini).** *Siano  $\gamma_1, \gamma_2 \in L^\infty(\Omega)$  e supponiamo che soddisfino la (1.33). Siano  $\psi, \phi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  e siano  $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$  soluzioni rispettivamente di*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u_1) = 0, & \text{in } \Omega, \\ u_1 = \psi, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.70)$$

e

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u_2) = 0, & \text{in } \Omega, \\ u_2 = \phi, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.71)$$

allora

$$\langle (\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2})(\psi), \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_2) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx. \quad (1.72)$$

**Dimostrazione.**

Da (1.69) si ha (ponendo per brevità  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$ )

$$\langle (\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2})(\psi), \phi \rangle = \langle \Lambda_{\gamma_1}(\psi), \phi \rangle - \langle \Lambda_{\gamma_2}(\psi), \phi \rangle = \langle \Lambda_{\gamma_1}(\psi), \phi \rangle - \langle \Lambda_{\gamma_2}(\phi), \psi \rangle. \quad (1.73)$$

Ora da (1.70) e (1.71) abbiamo, rispettivamente,

$$\langle \Lambda_{\gamma_1}(\psi), \phi \rangle = \int_{\Omega} \gamma_1 \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx$$

e

$$\langle \Lambda_{\gamma_2}(\phi), \psi \rangle = \int_{\Omega} \gamma_2 \nabla u_2 \cdot \nabla u_1 dx = \int_{\Omega} \gamma_2 \nabla u_1 \cdot \nabla u_2$$

che inserendole in (1.73) forniscono

$$\langle (\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2})(\psi), \phi \rangle = \int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_2) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx.$$

□

Una conseguenza pressoché immediata dell'identità di Alessandrini è la continuità dell'applicazione  $\gamma \rightarrow \Lambda_{\gamma}$ . Precisamente abbiamo la seguente

**Proposizione 1.15.** *Esiste una costante  $C$  che dipende solo da  $\lambda$  e da  $\Omega$  tale che se  $\gamma_1, \gamma_2 \in L^{\infty}(\Omega)$  soddisfano (1.33) allora*

$$\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}, H^{-1/2})} \leq C \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^{\infty}(\Omega)}. \quad (1.74)$$

**Dimostrazione**

Dall'identità di Alessandrini e dalla disuguaglianza di Schwarz abbiamo

$$\begin{aligned} |\langle (\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2})(\psi), \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}| &= \left| \int_{\Omega} (\gamma_1 - \gamma_2) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx \right| \\ &\leq \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Ora, dalla (1.51) abbiamo

$$\|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad \text{e} \quad \|\nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

dove  $C$  dipende solo da  $\lambda$  e da  $\Omega$ . Inserendo quanto ottenuto in (1.75) abbiamo

$$|\langle (\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2})(\psi), \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}| \leq C \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \|\phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Da cui segue la (1.74). □

## 1.10 Risultati di regolarità

Nel paragrafo 1.8 (Teorema 1.13) abbiamo stabilito che se  $\Omega$  è un aperto di classe  $C^1$ ,  $\gamma \in L^\infty(\Omega)$  soddisfa (1.33),  $F \in H^{-1}(\Omega)$  e  $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  allora il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = -F, & \text{in } \Omega \\ u = \psi, & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.76)$$

è ben posto in  $H^1(\Omega)$ .

È naturale domandarsi se con ipotesi più restrittive sui dati  $\Omega, \gamma, F$  e  $\psi$   $u$  risulti più regolare.

Conviene distinguere tra la **regolarità all'interno** e la **regolarità al bordo**. Nel seguito indicheremo con  $H_{loc}^k(\Omega)$  lo spazio delle funzioni  $u$  definite su  $\Omega$  e tali che per ogni  $x_0 \in \Omega$  esista  $r > 0$  tale che  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$  e  $u|_{B_r(x_0)} \in H^k(B_r(x_0))$ .

Quando ci riferiremo alle soluzioni in  $H^1(\Omega)$  dell'equazione

$$\operatorname{div}(\gamma \nabla u) = -F, \quad \text{in } \Omega \quad (1.77)$$

intenderemo le  $u \in H^1(\Omega)$  tali che

$$\int_{\Omega} \gamma \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = F(\varphi) \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.78)$$

Per questo non occorre nessuna ipotesi di regolarità sull'aperto  $\Omega$ .

**Teorema 1.16 (regolarità all'interno).** *Sia  $F \in L^2(\Omega)$  e sia  $\gamma \in C^1(\overline{\Omega})$  tale che*

$$\lambda^{-1} \leq \gamma(x) \leq \lambda, \quad \text{q.o. in } \Omega. \quad (1.79)$$

*Se  $u \in H^1(\Omega)$  è una soluzione di (1.78) allora  $u \in H_{loc}^2(\Omega)$  e per ogni aperto  $\Omega'$  tale che  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$  si ha*

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C \|F\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.80)$$

*dove  $C$  dipende solo da  $\lambda, \|\gamma\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \Omega$  e  $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ .*

Più in generale si può dimostrare che se  $F \in H^k(\Omega)$  e  $\gamma \in C^k(\overline{\Omega})$  allora  $u \in H_{loc}^{k+2}(\Omega)$  e

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega')} \leq C \|F\|_{H^k(\Omega)}, \quad (1.81)$$

dove  $C$  dipende solo da  $\lambda, \|\gamma\|_{C^k(\overline{\Omega})}, \Omega$  e  $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ . Da questo e dal Teorema 1.6 segue che se  $F \in C^\infty(\Omega)$  e  $\gamma \in C^\infty(\Omega)$  allora  $u \in C^\infty(\Omega)$ . Ad esempio se

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega \quad (1.82)$$

ovvero se  $u \in H^1(\Omega)$  è tale che

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0, \quad \text{per ogni } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.83)$$

allora  $u \in C^\infty(\Omega)$ .



**Teorema 1.17 (regolarità al bordo).** Sia  $\Omega$  un aperto di classe  $C^2$  e siano  $F$  e  $\gamma$  come nel Teorema 1.16. Se  $u \in H^1(\Omega)$  è la soluzione di (1.78) e  $u|_{\partial\Omega} \in H^{3/2}(\partial\Omega)$  allora  $u \in H^2(\Omega)$  e posto  $\psi = u|_{\partial\Omega}$  si ha

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left( \|F\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} \right), \quad (1.84)$$

dove  $C$  dipende solo da  $\lambda$ ,  $\Omega$ ,  $\|\gamma\|_{C^1(\bar{\Omega})}$ .

Più in generale si può dimostrare che se  $F \in H^k(\Omega)$ ,  $\gamma \in C^k(\bar{\Omega})$  e  $u|_{\partial\Omega} \in H^{k-1/2}(\partial\Omega)$  allora  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  e

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C \left( \|F\|_{H^k(\Omega)} + \|\psi\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} \right), \quad (1.85)$$

dove  $C$  dipende solo da  $\lambda$ ,  $\Omega$  e  $\|\gamma\|_{C^k(\bar{\Omega})}$ . Da questo risultato e dal Teorema 1.6 segue che se  $F \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $\gamma \in C^\infty(\bar{\Omega})$  e  $u|_{\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega)$  allora  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .

## 2 La disuguaglianza delle tre sfere per funzioni armoniche

Nel seguito indicheremo con  $B_{R_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R_0\}$  dove  $R_0$  è un numero positivo assegnato. Sia  $u$  una soluzione dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ in } B_{R_0}. \quad (2.1)$$

**Teorema 2.1 (disuguaglianza delle tre sfere).** Sia  $u \in L^2(B_{R_0})$  una soluzione di (2.1). Supponiamo che  $u \in L^2(B_{R_0})$  e siano  $0 < r_1 < r_2 < r_3 \leq R_0$  allora

$$\int_{B_{r_2}} u^2 dx \leq \left( \int_{B_{r_1}} u^2 dx \right)^\vartheta \left( \int_{B_{r_3}} u^2 dx \right)^{1-\vartheta}, \quad (2.2)$$

dove

$$\vartheta = \frac{\log\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right)}. \quad (2.3)$$

*Osservazione 2.2.* Si osservi che (2.3) è equivalente a

$$r_2 = r_1^\vartheta r_3^{1-\vartheta}. \quad (2.4)$$

Per quello che ci interessa possiamo escludere che  $u$  sia costante in  $B_{R_0}$  (in caso contrario 2.1 è banalmente verificata).

Per  $r \in (0, R_0]$  definiamo

$$I(r) = \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad H(r) = \int_{\partial B_r} u^2 dS, \quad (2.5)$$

dove  $dS$  è l'elemento di superficie.

Osserviamo che per ogni  $r \in (0, R_0]$  si ha  $I(r) > 0$  e  $H(r) > 0$ . Infatti se esistesse  $\rho \in (0, R_0]$  tale che  $I(\rho) = 0$  avremmo che  $u$  sarebbe costante in  $B_\rho$  e per il principio di massimo  $u$  sarebbe costante in  $B_{R_0}$ . Per quanto riguarda  $H$ , se per un certo  $\rho \in (0, R_0]$  avessimo  $H(\rho) = 0$  allora  $u = 0$  su  $\partial B_\rho$  e il principio di massimo fornirebbe  $u = 0$  in  $B_\rho$  e di conseguenza  $u \equiv 0$  in  $B_{R_0}$ .

Poiché  $H(r) > 0$  in  $(0, R_0]$  possiamo definire la **funzione frequenza**,  $N(r)$  relativa a  $u$ :

$$N(r) = \frac{rI(r)}{H(r)}. \quad (2.6)$$

La funzione frequenza è stata introdotta da Almgren (1977) ed ha questo nome perché per un polinomio armonico omogeneo di grado  $m$  si ha  $N(r) = m$  per tutti gli  $r$ . Ad esempio in dimensione 2 i polinomi armonici omogenei di grado  $m$  sono (in coordinate polari) del tipo  $p_m(\rho, \theta) = A\rho^m \cos m\theta + B\rho^m \sin m\theta$  ed è facile verificare quanto asserito.

La proposizione chiave da cui deriva il Teorema 2.1 è la seguente

**Proposizione 2.3.** *Se  $u$  è una soluzione non identicamente nulla di (2.1) allora  $N(r)$  è crescente.*

Utilizzeremo la seguente **identità di Rellich** per  $v \in C^2(B_{R_0})$

$$2(x \cdot \nabla v)\Delta v = \operatorname{div}[2(x \cdot \nabla v)\nabla v - x|\nabla v|^2] + (n-2)|\nabla v|^2, \quad (2.7)$$

(il lettore verifichi la (2.7)).

Premettiamo alla dimostrazione della Proposizione 2.3 il seguente

**Lemma 2.4.** *Sotto le stesse ipotesi della Proposizione 2.3 si ha ( $\nu$  indica il versore normale esterno a  $\partial B_r$ )*

$$I(r) = \int_{\partial B_r} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS, \quad (2.8)$$

$$H'(r) = \frac{n-1}{r}H(r) + 2I(r), \quad (2.9)$$

$$I'(r) = 2 \int_{\partial B_r} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 dS + \frac{n-2}{r}I(r). \quad (2.10)$$

**Dimostrazione.**

Per quanto riguarda la (2.8) basta osservare che dalla (2.1) si ha

$$I(r) = \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx = \int_{B_r} \operatorname{div}(u\nabla u) dx = \int_{\partial B_r} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Per dimostrare la (2.9) cominciamo ad osservare che

$$H(r) = \frac{1}{r} \int_{B_r} \operatorname{div}(xu^2) dx, \quad (2.11)$$

infatti

$$H(r) = \frac{1}{r} \int_{\partial B_r} \left( x \cdot \frac{x}{|x|} \right) u^2 dS = \frac{1}{r} \int_{\partial B_r} (x \cdot \nu) u^2 dS = \frac{1}{r} \int_{B_r} \operatorname{div}(xu^2) dx.$$

Dalle (2.8) e (2.11) abbiamo

$$\begin{aligned}
H'(r) &= \frac{1}{r} \int_{\partial B_r} \operatorname{div}(xu^2) dS - \frac{1}{r^2} \int_{B_r} \operatorname{div}(xu^2) dx \\
&= \frac{1}{r} \left\{ n \int_{\partial B_r} u^2 dS + 2 \int_{\partial B_r} (x \cdot \nabla u) u dS \right\} - \frac{1}{r} H(r) \\
&= \frac{n-1}{r} \int_{\partial B_r} u^2 dS + 2 \int_{\partial B_r} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \frac{n-1}{r} H(r) + 2I(r),
\end{aligned}$$

che fornisce la (2.9).

Dimostriamo la (2.10).  
Abbiamo innanzitutto

$$I'(r) = \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 dS. \quad (2.12)$$

Ora applichiamo l'identità di Rellich (2.7) alla funzione  $u$ , integriamo ambo i membri di (2.7) su  $B_r$  e ricordiamo che  $\Delta u = 0$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial B_r} \left\{ 2(x \cdot \nabla u) \nabla u \cdot \frac{x}{|x|} - x \cdot \frac{x}{|x|} |\nabla u|^2 \right\} dS + (n-2) \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx \\
&= \int_{\partial B_r} \left\{ 2r \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 - r |\nabla u|^2 \right\} dS + (n-2) \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx,
\end{aligned}$$

da cui, tenendo presente la (2.12), si ha

$$\begin{aligned}
I'(r) &= \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 dS = 2 \int_{\partial B_r} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 dS + \frac{n-2}{r} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx \\
&= 2 \int_{\partial B_r} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 dS + \frac{n-2}{r} I(r).
\end{aligned} \quad (2.13)$$

□

### Dimostrazione della Proposizione 2.3

Da (2.6), derivando ambo i membri, abbiamo

$$N'(r) = \frac{I(r)}{H(r)} + r \frac{I'(r)}{H(r)} - r \frac{I(r)H'(r)}{H^2(r)}. \quad (2.14)$$

Dividendo ambo i membri della (2.14) per  $N(r)$  (ricordiamo che  $N(r) > 0$  a meno che  $u$  non sia costante) abbiamo

$$\frac{N'(r)}{N(r)} = \frac{1}{r} + \frac{I'(r)}{I(r)} - \frac{H'(r)}{H(r)}$$

da cui, tenendo presenti le (2.9) e (2.10), otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{N'(r)}{N(r)} &= \frac{1}{r} + \frac{I'(r)}{I(r)} - \frac{\frac{n-1}{r}H(r) + 2I(r)}{H(r)} \\
&= \frac{2-n}{r} + \frac{I'(r)}{I(r)} - 2\frac{I(r)}{H(r)} \\
&= 2 \left\{ \frac{\int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dS}{I(r)} - \frac{I(r)}{H(r)} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ora esprimiamo  $I(r)$  mediante (2.8) e dalla (2.16) otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{N'(r)}{N(r)} &= 2 \left\{ \frac{\int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dS}{\int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dS} - \frac{\int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dS}{\int_{\partial B_r} u^2 dS} \right\} \\
&= \frac{2}{I(r)H(r)} \left\{ \left( \int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dS \right) \left( \int_{\partial B_r} u^2 dS \right) - \left( \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dS \right)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

e applicando la disuguaglianza di Schwarz abbiamo

$$\left( \int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 dS \right) \left( \int_{\partial B_r} u^2 dS \right) - \left( \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dS \right)^2 \geq 0$$

da cui la tesi.  $\square$

### Dimostrazione del Teorema 2.1.

Poniamo

$$F(r) = r^{-n+1}H(r) \quad \text{e} \quad \tilde{F}(t) = F(e^t).$$

Da (2.9) abbiamo

$$\frac{d}{dr} \log F(r) = \frac{2I(r)}{H(r)} = \frac{2}{r}N(r)$$

da cui si ha

$$\frac{d}{dt} \log \tilde{F}(t) = 2N(e^t)$$

che insieme alla Proposizione 2.3 implica la convessità della funzione  $\log \tilde{F}(t)$ .

Ora siano  $t_j = \log r_j$  per  $j = 1, 2, 3$ . Da (2.3) abbiamo  $t_2 = \vartheta t_1 + (1 - \vartheta)t_3$  e quindi

$$\tilde{F}(t_2) \leq \left( \tilde{F}(t_1) \right)^\vartheta \left( \tilde{F}(t_3) \right)^{1-\vartheta}$$

ovvero

$$F(r_2) \leq (F(r_1))^\vartheta (F(r_3))^{1-\vartheta}$$

da cui, tenendo presente (2.4), abbiamo

$$\int_{\partial B_{r_2}} u^2 dS \leq \left( \int_{\partial B_{r_1}} u^2 dS \right)^\vartheta \left( \int_{\partial B_{r_3}} u^2 dS \right)^{1-\vartheta}. \tag{2.17}$$

Da quest'ultima disuguaglianza, utilizzando ancora (2.4) e la disuguaglianza di Hölder abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_2}} u^2 dx &= \int_0^{r_2} \left( \int_{\partial B_\tau} u^2 dS \right) d\tau \\
&= \int_0^1 r_2 \left( \int_{\partial B_{tr_2}} u^2 dS \right) dt \leq \int_0^1 r_2 \left( \int_{\partial B_{tr_1}} u^2 dS \right)^\vartheta \left( \int_{\partial B_{tr_3}} u^2 dS \right)^{1-\vartheta} dt \\
&= \int_0^1 \left( r_1 \int_{\partial B_{tr_1}} u^2 dS \right)^\vartheta \left( r_3 \int_{\partial B_{tr_3}} u^2 dS \right)^{1-\vartheta} dt \\
&\leq \left( \int_0^1 r_1 \int_{\partial B_{tr_1}} u^2 dS dt \right)^\vartheta \left( \int_0^1 r_3 \int_{\partial B_{tr_3}} u^2 dS dt \right)^{1-\vartheta} = \left( \int_{B_{r_1}} u^2 dx \right)^\vartheta \left( \int_{B_{r_3}} u^2 dx \right)^{1-\vartheta}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

che ci fornisce la (2.2).  $\square$

*Osservazione 2.5.* Facciamo alcune osservazioni sul Teorema 2.1.

(i) La disuguaglianza (2.2) implica una stima di stabilità condizionata per il problema del prolungamento di una funzione armonica dalla palla  $B_{r_1}$ . Infatti, se

$$\|u\|_{L^2(B_{r_1})} \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2(B_{r_3})} \leq E$$

allora per  $r_2 < r_3$  si ha

$$\|u\|_{L^2(B_{r_2})} \leq \varepsilon^\vartheta E^{1-\vartheta}.$$

(ii) La disuguaglianza (2.2) non è migliorabile. Precisamente si ha che se  $C > 0$  allora

$$\vartheta = \sup \left\{ s > 0 : \|u\|_{L^2(B_{r_2})} \leq C \|u\|_{L^2(B_{r_1})}^s, \|u\|_{L^2(B_{r_3})} = 1, \Delta u = 0 \text{ in } B_1 \right\} \tag{2.19}$$

e

$$1 = \inf \left\{ C > 0 : \|u\|_{L^2(B_{r_2})} \leq C \|u\|_{L^2(B_{r_1})}^\vartheta, \|u\|_{L^2(B_{r_3})} = 1, \Delta u = 0 \text{ in } B_{R_0} \right\}. \tag{2.20}$$

Le (2.19) e (2.20) possono essere provate utilizzando i polinomi armonici omogenei.

(iii) A partire dalla sola disuguaglianza (2.2) segue la seguente proprietà di prolungamento unico per le funzioni armoniche (già nota per altre argomentazioni) (supponiamo  $R_0 = 1$ )

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } B_1, \\ u \in L^2(B_1), \\ \|u\|_{L^2(B_r)} = \mathcal{O}(r^N), \text{ per } r \rightarrow 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \end{cases} \implies u \equiv 0. \tag{2.21}$$

Per provare la (2.21) procediamo per assurdo. Supponiamo che  $u \not\equiv 0$  allora possiamo supporre che  $\|u\|_{L^2(B_1)} = 1$ . Ora sia  $\rho \in (0, 1)$  arbitrario. Poiché

$$\|u\|_{L^2(B_r)} \leq C_N r^N, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

applicando la disuguaglianza (2.2) per  $r_1 = r$ ,  $r_2 = \rho$  e  $r_3 = 1$  abbiamo per ogni  $r < \rho$  e per ogni  $N \in \mathbb{N}$

$$\|u\|_{L^2(B_\rho)} \leq (C_N r^N)^{\frac{\log(\frac{1}{\rho})}{\log(\frac{1}{r})}}.$$

Ora

$$\lim_{r \rightarrow 0} (C_N r^N)^{\frac{\log(\frac{1}{\rho})}{\log(\frac{1}{r})}} = \rho^N$$

quindi

$$\|u\|_{L^2(B_\rho)} \leq \rho^N, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

e passando al limite per  $N \rightarrow \infty$  abbiamo

$$\|u\|_{L^2(B_\rho)} = 0,$$

per l'arbitrarietà di  $\rho \in (0, 1)$  si ha  $\|u\|_{L^2(B_1)} = 0$ . Assurdo.

La (2.21) è nota come **proprietà di continuazione unica forte** ("strong unique continuation property") per le funzioni armoniche. È evidente che (2.21) implica che se una funzione  $u$ , armonica in  $B_1$  (o più in generale, in un aperto connesso  $\Omega$ ), è nulla in un sottoinsieme aperto di  $B_1$  (di  $\Omega$ ) allora  $u \equiv 0$  in  $B_1$  (in  $\Omega$ ).

Nella proposizione che segue riportiamo un'altra conseguenza notevole della Proposizione 2.3

**Proposizione 2.6 (disuguaglianza di raddoppiamento o "doubling").**  
*Se  $u \in C^1(\overline{B_{R_0}})$  è una soluzione non identicamente nulla di (2.1) allora*

$$\int_{B_{2r}} u^2 dx \leq C e^{N(R_0)} \int_{B_r} u^2 dx \text{ per } 0 \leq r \leq \frac{R_0}{2}. \quad (2.22)$$

dove  $C = 2^{n+2}$

**Dimostrazione.**

Dalla (2.9) abbiamo, per  $\rho \in (0, R_0/2]$

$$\frac{d}{d\rho} \log(\rho^{1-n} H(\rho)) = \frac{2}{\rho} N(\rho). \quad (2.23)$$

Integrando ambo i membri di (2.23) sull'intervallo  $(s, 2s)$ , con  $s \leq \frac{R_0}{2}$  e ricordando che  $N$  è crescente abbiamo

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{H(2s)}{2^{n-1}H(s)}\right) &= \int_s^{2s} \frac{d}{d\rho} \log(\rho^{1-n} H(\rho)) d\rho \\ &= \int_s^{2s} \frac{2}{\rho} N(\rho) \leq \int_s^{2s} \frac{2}{\rho} N(R_0) d\rho = (2 \log 2) N(R_0). \end{aligned}$$

Perciò

$$H(2s) \leq 2^{n+1} e^{N(R_0)} H(s). \quad (2.24)$$

Integrando ambo i membri di (2.24) sull'intervallo  $(0, r)$  abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B_{2r}} u^2 dx &= \int_0^{2r} H(\rho) d\rho = 2 \int_0^r H(2s) ds \\ &\leq 2^{n+2} e^{N(R_0)} \int_0^r H(s) ds = 2^{n+2} e^{N(R_0)} \int_{B_r} u^2 dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

□

*Osservazione 2.7.* Poniamo

$$K_0 = \left( C e^{N(R_0)} \right)^{1/2}.$$

Si può osservare che dalla (2.22) segue, per  $r \leq \rho < \frac{R_0}{2}$ ,

$$\|u\|_{L^2(B_\rho)} \leq K_0 \left( \frac{\rho}{r} \right)^{\log_2 K_0} \|u\|_{L^2(B_r)}. \quad (2.26)$$

Per dimostrare la (2.26) poniamo

$$f(r) = \|u\|_{L^2(B_r)},$$

possiamo allora scrivere la (2.22) come

$$f(2r) \leq K_0 f(r), \text{ per ogni } r \in (0, R_0/2). \quad (2.27)$$

Sia  $m = \lceil \log_2 \left( \frac{\rho}{r} \right) \rceil$ , in questo modo abbiamo

$$2^m r \leq \rho < 2^{m+1} r.$$

Quindi, ricordando la (2.27) abbiamo

$$f(\rho) \leq f(2^{m+1} r) \leq K_0 f(2^m r) \leq \dots \leq K_0^{m+1} f(r) \leq K_0 \left( \frac{\rho}{r} \right)^{\log_2 K_0} f(r), \quad (2.28)$$

da cui segue la (2.26).

Una conseguenza importante della (2.26) è nuovamente la proprietà di continuazione unica forte (cfr. Osservazione 2.5) per le funzioni armoniche.

Infatti supponiamo che

$$\|u\|_{L^2(B_r)} \leq C_N r^N, \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad (2.29)$$

e supponiamo che  $u$  non sia identicamente nulla in  $B_{R_0}$  allora da (2.26) e da (2.29) abbiamo, per  $\rho$  fissato in  $(0, R_0/2)$ ,

$$\|u\|_{L^2(B_\rho)} \leq \lim_{r \rightarrow 0} C_N K_0 \left( \frac{\rho}{r} \right)^{\log_2 K_0} r^N = 0$$

da cui  $u = 0$  in  $B_\rho$ . Applicando nuovamente la (2.26) a palle centrate in punti di  $B_\rho$  si ottiene  $u \equiv 0$  in  $B_{R_0}$ . Assurdo.

### 3 Stime di stabilità per il problema di Cauchy

Ritorniamo all'esempio di Hadamard per mostrare quali sono le stime di stabilità condizionata per il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace che possiamo aspettarci.

Sia  $u$  una soluzione dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } Q = (-\pi, \pi) \times (0, 1) \quad (3.1)$$

e supponiamo che

$$\begin{cases} \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(-\pi, \pi)} \leq \varepsilon \\ u_y(\cdot, 0) = 0, \quad \text{in } (-\pi, \pi). \end{cases} \quad (3.2)$$

Cominciamo a domandarci qual è la migliore stima di stabilità che possiamo ottenere per  $\|u(\cdot, y)\|_{L^2(-\pi, \pi)}$ , quando  $y \in (0, 1)$  oppure  $y = 1$ , se introduciamo la limitazione a priori

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq 1. \quad (3.3)$$

Poniamo la questione in modo più preciso, siamo interessati, per  $y \in (0, 1]$ , al comportamento asintotico di  $\omega(\varepsilon; y)$  per  $\varepsilon$  che tende a 0, dove

$$\omega(\varepsilon; y) = \sup \left\{ \|u(\cdot, y)\|_{L^2(-\pi, \pi)} : u \text{ soddisfa (3.1), (3.2), (3.3)} \right\}. \quad (3.4)$$

Fissiamo  $\varepsilon$  (sufficientemente piccolo) e sia

$$u_k(x, y) = A_k \sin kx \cosh ky, \quad (3.5)$$

con  $A_k > 0$  da scegliere. La  $u_k$  risulta armonica in  $Q$ , e soddisfa a

$$\frac{\partial u_k}{\partial y}(x, 0) = 0.$$

Inoltre

$$\|u_k(\cdot, 0)\|_{L^2(-\pi, \pi)} = \sqrt{\pi} A_k, \quad (3.6)$$

$$\|u_k(\cdot, y)\|_{L^2(-\pi, \pi)} = \sqrt{\pi} A_k \cosh ky \quad (3.7)$$

e

$$\|u_k\|_{L^\infty(Q)} = A_k \cosh k. \quad (3.8)$$

Scegliamo

$$A_k = \frac{1}{\cosh k} \quad (3.9)$$

in modo che si abbia

$$\|u_k\|_{L^\infty(Q)} = 1.$$

Per  $\varepsilon \in (0, 1)$  sia  $k := k_\varepsilon = \left\lceil \log \frac{2\sqrt{\pi}}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ , con questa scelta si ha

$$e^{-k_\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \leq e^{-k_\varepsilon + 1}.$$

Quindi, per  $0 \leq y < 1$ , abbiamo



$$\omega(\varepsilon; y) \geq \|u_{k_\varepsilon}(\cdot, y)\|_{L^2(-\pi, \pi)} \geq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-k_\varepsilon(1-y)} \geq \sqrt{\pi} \left( \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1-y}. \quad (3.10)$$

In altre parole: la stima di stabilità di  $u(\cdot, y)$ ,  $0 \leq y < 1$ , per il problema di Cauchy (3.1), (3.2) con la limitazione a priori (3.3) è al più hölderiana. Invece la limitazione a priori (3.3) non è sufficiente a garantire stabilità per  $u(\cdot, 1)$  in quanto  $\omega(\varepsilon; 1)$  non tende a zero per  $\varepsilon$  che tende a zero.

Si può vedere che se invece della limitazione a priori (3.3) si pongono limitazioni a priori sulle derivate di un qualsiasi ordine di  $u$  la stabilità per  $u(\cdot, 1)$  è al più logaritmica. Qui consideriamo il caso della limitazione a priori

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^\infty(Q)} \leq 1, \quad (3.11)$$

il caso generale si potrà trattare in modo analogo. Poniamo

$$\omega_1(\varepsilon) = \sup \left\{ \|u(\cdot, 1)\|_{L^2(-\pi, \pi)} : u \text{ soddisfa (3.1), (3.2), (3.11)} \right\}. \quad (3.12)$$

In (3.5) scegliamo

$$A_k = \frac{1}{k \sinh k} \quad (3.13)$$

in modo che si abbia  $\left\| \frac{\partial u_k}{\partial y} \right\|_{L^\infty(Q)} = 1$ . Fissiamo  $\varepsilon$  e sia  $k_\varepsilon$  il minimo intero tale che  $\frac{1}{k \sinh k} \leq \varepsilon$  è facile verificare che per una opportuna costante positiva  $c$  si ha, per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo,

$$\frac{1}{k_\varepsilon} \geq \left( \log \frac{c}{\varepsilon} \right)^{-1},$$

da segue

$$\omega_1(\varepsilon) \geq \|u_{k_\varepsilon}(\cdot, 1)\|_{L^2(-\pi, \pi)} \geq \frac{\sqrt{\pi}}{k_\varepsilon} \geq \sqrt{\pi} \left( \log \frac{c}{\varepsilon} \right)^{-1} \quad (3.14)$$

che prova quanto asserito riguardo alla stabilità logaritmica.

Il lettore provi a esaminare i casi in cui in (3.3) e in (3.11) si sostituisca la norma  $L^\infty$  con la norma  $L^2$  e nel caso in cui nella (3.11) si sostituisca alla derivata rispetto a  $y$  la derivata rispetto a  $x$  o derivate di ordine superiore.

### 3.1 Stima della propagazione dell'errore

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto convesso (nell'Osservazione 3.2 daremo un cenno al caso più generale) e siano  $p, q \in \Omega$ . Indichiamo con  $L = |p - q|$ ,  $d = \min\{\text{dist}(p, \partial\Omega), \text{dist}(q, \partial\Omega)\}$ ,  $r \leq r_0 := \frac{d}{4}$ . Sia  $u$  una soluzione di

$$\Delta u = 0, \text{ in } \Omega, \quad (3.15)$$

tale che

$$\|u\|_{L^2(B_r(p))} \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq E, \quad (3.16)$$

con  $\varepsilon \leq E$  numeri positivi assegnati, come consuetudine  $\varepsilon$  rappresenta "l'errore". Siamo interessati a stimare come si propaga l'errore in  $q$ , cioè a stimare  $|u(q)|$ .

Per semplicità distinguiamo due casi:

(a)  $L \leq 2r_0$ ,

(b)  $L > 2r_0$ .

**Caso (a).** Applichiamo la disuguaglianza delle tre sfere (2.2) a palle con centro in  $p$  e raggi  $r_1 = r$ ,  $r_2 = 3r_0$  e  $r_3 = 4r_0$ . Abbiamo

$$\|u\|_{L^2(B_{3r_0}(p))} \leq \|u\|_{L^2(B_r(p))}^{\vartheta_r} \|u\|_{L^2(B_{4r_0}(p))}^{1-\vartheta_r} \leq \varepsilon^{\vartheta_r} E^{1-\vartheta_r}, \quad (3.17)$$

dove  $\vartheta_r = \frac{\log 4/3}{\log(4r_0r^{-1})}$ . Ora, tenendo conto che  $B_{r_0}(q) \subset B_{3r_0}(p)$ , applichiamo il teorema della media e la disuguaglianza di Schwarz

$$\begin{aligned} |u(q)| &= \frac{1}{|B_{r_0}|} \left| \int_{B_{r_0}(q)} u dx \right| \leq |B_{r_0}|^{-1/2} \|u\|_{L^2(B_{r_0}(q))} \\ &\leq |B_{r_0}|^{-1/2} \|u\|_{L^2(B_{3r_0}(p))} \leq |B_{r_0}|^{-1/2} \varepsilon^{\vartheta_r} E^{1-\vartheta_r}, \end{aligned}$$

dove con  $|B_{r_0}|$  abbiamo indicato la misura della palla  $n$ -dimensionale di raggio  $r_0$ .

Quindi nel caso (a) si ha

$$|u(q)| \leq |B_{r_0}|^{-1/2} \varepsilon^{\vartheta_r} E^{1-\vartheta_r} \quad (3.18)$$

**Caso (b).** Qui abbiamo  $L > 2r_0$ . Per semplificare un po' i calcoli supponiamo  $E = 1$ , Questo corrisponde a considerare  $E^{-1}u$  invece di  $u$  e quindi a porre  $\varepsilon E^{-1}$  al posto di  $\varepsilon$  nella prima delle (3.16). Supponiamo dunque che

$$\|u\|_{L^2(B_r(p))} \leq \varepsilon E^{-1} \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 1. \quad (3.19)$$

Applichiamo la disuguaglianza delle tre sfere (2.2) a sfere centrate in  $p$  e di raggi  $r_1 = r$ ,  $r_2 = r_0$  e  $r_3 = 4r_0$ . Abbiamo

$$\|u\|_{L^2(B_{r_0}(p))} \leq \varepsilon_1 := (\varepsilon E^{-1})^{\vartheta'_r}, \quad (3.20)$$

dove  $\vartheta'_r = \frac{\log 4}{\log(4r_0r^{-1})}$ . Siano  $N = \left\lceil \frac{L}{2r_0} \right\rceil$  e  $x_j = p + \frac{2r_0j}{L}(q-p)$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ . Si osservi che tutti i punti  $x_j$  appartengono al segmento di estremi  $p$  e  $q$ , inoltre  $x_0 = p$ ,  $|x_{j-1} - x_j| = 2r_0$  per  $j = 1, \dots, N$  e

$$|q - x_N| < 2r_0. \quad (3.21)$$

Dalla costruzione precedente risulta che le palline  $\overline{B}_{r_0}(x_{j-1})$  e  $\overline{B}_{r_0}(x_j)$  sono tangenti esternamente e inoltre  $B_{r_0}(x_j) \subset B_{3r_0}(x_{j-1})$  da cui segue banalmente che

$$\|u\|_{L^2(B_{r_0}(x_j))} \leq \|u\|_{L^2(B_{3r_0}(x_{j-1}))} \quad \text{per } j = 1, \dots, N. \quad (3.22)$$

Ora applicando la disuguaglianza delle tre sfere a palle con centro in  $x_{j-1}$  e raggi  $r_1 = r_0$ ,  $r_2 = 3r_0$  e  $r_3 = 4r_0$  abbiamo (ricordando la seconda di (3.19))

$$\|u\|_{L^2(B_{3r_0}(x_{j-1}))} \leq \|u\|_{L^2(B_{r_0}(x_{j-1}))}^\mu \|u\|_{L^2(B_{4r_0}(x_{j-1}))}^{1-\mu} \leq \|u\|_{L^2(B_{r_0}(x_{j-1}))}^\mu, \quad (3.23)$$

dove  $\mu = \frac{\log(4/3)}{\log 4}$ . Dalle (3.20) e (3.22) abbiamo

$$\|u\|_{L^2(B_{r_0}(x_j))} \leq \|u\|_{L^2(B_{r_0}(x_{j-1}))}^\mu \quad \text{per } j = 1, \dots, N,$$

da cui, iterando e tenendo presente la (3.20) si ha

$$\|u\|_{L^2(B_{r_0}(x_j))} \leq \varepsilon_1^{\mu^j} \quad \text{per } j = 1, \dots, N,$$

e, in particolare,

$$\|u\|_{L^2(B_{r_0}(x_N))} \leq \varepsilon_1^{\mu^N}. \quad (3.24)$$

Ora da (3.21) sappiamo che  $B_{r_0}(q) \subset B_{3r_0}(x_N)$ , quindi applicando nuovamente la disuguaglianza delle tre sfere con la stessa terna di raggi e utilizzando la (3.24) abbiamo

$$\|u\|_{L^2(B_{r_0}(q))} \leq (\varepsilon E^{-1})^{\vartheta'_r \mu^{N+1}} \quad (3.25)$$

e dal teorema della media, abbiamo

$$|u(q)| \leq |B_{r_0}|^{-1/2} \|u\|_{L^2(B_{r_0}(q))} \leq |B_{r_0}|^{-1/2} (\varepsilon E^{-1})^{\vartheta'_r \mu^{N+1}}. \quad (3.26)$$

Tenendo presente che  $N+1 \geq \frac{L}{2r_0}$ ,  $d = r_0/4$  e che  $\vartheta'_r \geq \vartheta_r$  possiamo unificare (3.18) e (3.26) nella seguente

**Proposizione 3.1 (stima della propagazione dell'errore).** *Siano  $\Omega$  un aperto convesso di  $\mathbb{R}^n$  e  $p, q \in \Omega$ . Indichiamo con  $d = \min\{\text{dist}(p, \partial\Omega), \text{dist}(q, \partial\Omega)\}$  e  $L = |p - q|$ . Sia inoltre  $u$  una funzione armonica in  $\Omega$  che soddisfi*

$$\|u\|_{L^2(B_r(p))} \leq \varepsilon \quad e \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq E, \quad (3.27)$$

dove  $r \leq \frac{d}{4}$ .

Allora

$$|u(q)| \leq C \varepsilon^\eta E^{1-\eta}, \quad (3.28)$$

dove

$$C = |B_{d/4}|^{-1/2}, \quad \eta = \left( \frac{\log(4/3)}{\log 4} \right)^{2L/d} \frac{\log 4}{\log(dr^{-1})}.$$

In particolare, se  $u$  è una funzione armonica nulla in un aperto di  $\Omega$  allora  $u \equiv 0$ .

*Osservazione 3.2.* Nel caso in cui  $\Omega$  sia un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n$  (e che valgano (3.27)) il procedimento precedente va un po' modificato. Senza entrare troppo in dettagli, supponiamo che  $\Omega$  sia limitato, siano  $p, q \in \Omega$  e sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  un arco di Jordan tale che  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ , poniamo  $\Gamma = \gamma([0, 1])$ . Poiché  $\Gamma$  è un compatto contenuto in  $\Omega$  si ha che  $\delta := \frac{1}{4} \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega) > 0$  (supponiamo

che  $r \leq \delta$ ). Ora definiamo  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  in accordo alla seguente regola, poniamo  $t_{k+1} = \max\{t \mid |\gamma(t) - x_k| = 2\delta\}$  se  $|x_k - q| > 2\delta$  altrimenti fermiamo il processo e poniamo  $N = k + 1$ ,  $t_N = 1$ . Sia  $x_k = \gamma(t_k)$ . Le palle  $B_\delta(x_k)$  sono a due a due disgiunte per  $k = 0, \dots, N - 1$  e  $|x_{k+1} - x_k| = 2\delta$ . Si ha inoltre  $B_\delta(x_{k+1}) \subset B_{3\delta}(x_k)$  (e  $B_{4\delta}(x_k) \subset \Omega$ ) e questo consente di seguire lo stesso procedimento iterativo seguito nell'ipotesi più restrittiva di  $\Omega$  convesso. Si noti che una stima dall'alto per  $N$  è fornita da  $N \leq \frac{|\Omega|}{|B_\delta|}$ . La stima di propagazione dell'errore che si otterrà sarà ancora di tipo hölderiano e la costante e l'esponente della stima finale dipenderanno da  $|\Omega|$ ,  $\delta$  e  $r$ .

### 3.2 Il problema di Cauchy

Cominciamo a introdurre le principali notazioni per formulare il problema di Cauchy. Siano  $M > 1$  e  $Q := Q_{1,M} = B'_1 \times (-M, M)$  e sia  $g : B'_1 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $g \in C^2(\overline{B'_1})$  e

$$\|\nabla_{x'} g\|_{L^\infty(\overline{B'_1})} < M, \quad (3.29)$$

$$g(0) = |\nabla_{x'} g(0)| = 0. \quad (3.30)$$

Osserviamo che, indicando con  $\Sigma$  il grafico di  $g$  abbiamo  $\Sigma \subset Q$ . Porremo inoltre

$$G^+ = \{(x', x_n) \in Q : g(x') < x_n\} \quad \text{e} \quad G^- = \{(x', x_n) \in Q : g(x') > x_n\}.$$

Siano  $f \in L^2(G^+)$ ,  $\psi_0 \in H_{co}^{3/2}(\Sigma)$  e  $\psi_1 \in H_{co}^{1/2}(\Sigma)$  e sia  $u \in H^2(G^+)$  soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } G^+, \\ u = \psi_0, & \text{su } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi_1, & \text{su } \Sigma, \end{cases} \quad (3.31)$$

dove  $\nu$  è il versore normale su  $\Sigma$  esterno a  $G^+$ . Si noti che se  $x = (x', g(x'))$  si ha

$$\nu(x) = \left( \frac{\nabla_{x'} g(x')}{\sqrt{1 + |\nabla_{x'} g(x')|^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{x'} g(x')|^2}} \right).$$

Mediante l'esempio di Hadamard abbiamo già mostrato il carattere mal posto del problema (3.31) quando  $f = 0$ , ora con un esempio simile mostriamo che se  $\psi_0 = \psi_1 = 0$  allora il problema (3.31) è ancora mal posto. Sia  $n = 2$  e sia

$$u_k(x) = \frac{e^{-\sqrt{k}} \sin kx_1}{2k^2} (\sin kx_2 - \sinh kx_2). \quad (3.32)$$

Risulta

$$\begin{cases} \Delta u_k = f_k(x_1, x_2) := e^{-\sqrt{k}} \sin kx_1 \sin kx_2, & \text{in } B_1^+, \\ u_k(x_1, 0) = 0, & \text{per } x_1 \in (-1, 1), \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0, & \text{per } x_1 \in (-1, 1), \end{cases} \quad (3.33)$$

quindi

$$\left\| \frac{\partial^{m+j} f_k}{\partial x_1^m \partial x_2^j} \right\|_{L^\infty(B_1^+)} \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty, \quad \forall m, j \in \mathbb{N},$$

ma

$$\|u_k\|_{L^2(B_r^+)} \rightarrow \infty \text{ per } k \rightarrow \infty, \quad \forall r \in (0, 1].$$

Per studiare il problema di Cauchy procederemo gradualmente mostrando che:

(a) il problema (3.31) ammette al più una soluzione in  $H^2(G^+)$ ;

(b) vale una stima di stabilità di tipo hölderiano in  $B_R \cap G^+$ ,  $R < 1$ , per il problema (3.31) quando

$$\psi_0 = \psi_1 = 0, \quad \|f\|_{L^2(G^+)} \leq \varepsilon \quad (3.34)$$

e

$$\|u\|_{L^2(G^+)} \leq E; \quad (3.35)$$

(c) vale una stima di stabilità (di tipo hölderiano in  $B_R \cap G^+$ ,  $R < 1$  con la limitazione a priori (3.35), ma invece di (3.34) faremo l'ipotesi più in generale

$$\|\psi_0\|_{H^{3/2}(\Sigma)} \leq \varepsilon, \quad \|\psi_1\|_{H^{1/2}(\Sigma)} \leq \varepsilon, \quad \|f\|_{L^2(G^+)} \leq \varepsilon. \quad (3.36)$$

Avvertiamo che le ipotesi (3.36) possono essere ulteriormente ridotte, ma qui cerchiamo di evitare complicazioni tecniche per poter concentrare l'attenzione sui passaggi più importanti che occorrono per trovare una stima di stabilità per il problema (3.31). Rinviamo a [Al-R-Ro-Ve] per discussioni e risultati più approfonditi.

**(a) Unicità.**

Basta mostrare che

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } G^+, \\ u = 0, & \text{su } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{su } \Sigma, \\ u \in H^2(G^+), \end{cases} \implies u \equiv 0. \quad (3.37)$$

Definiamo la funzione

$$\tilde{u} = \begin{cases} u, & \text{in } G^+, \\ 0, & \text{in } G^-. \end{cases} \quad (3.38)$$

Poiché  $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  si ha  $\tilde{u} \in H^2(Q)$  e

$$\Delta \tilde{u} = 0, \quad \text{in } B_1.$$

Infatti abbiamo

$$\int_Q \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi dx = \int_{G^+} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Sigma \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(Q).$$

D'altra parte  $\tilde{u} = 0$  in  $G^-$  e dalla Proposizione 3.1 segue che  $\tilde{u} \equiv 0$ , da cui abbiamo  $u \equiv 0$ .

**(b) Stabilità nel caso  $\psi_0 = \psi_1 = 0$**  In questo caso abbiamo

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } G^+, \\ u = 0, & \text{su } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{su } \Sigma, \\ u \in H^2(G^+), \end{cases} \quad (3.39)$$

dove  $f$  soddisfa

$$\|f\|_{L^2(G^+)} \leq \varepsilon$$

e  $u$  soddisfa (3.35).

Indichiamo con

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{in } G^+, \\ 0 & \text{in } G^-. \end{cases} \quad (3.40)$$

Si ha  $\tilde{f} \in L^2(Q)$  e

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(Q)} = \|f\|_{L^2(G^+)} \leq \varepsilon. \quad (3.41)$$

Sia  $\tilde{u}$  come in (3.38). Risulta

$$\Delta \tilde{u} = \tilde{f}$$

infatti

$$\int_Q \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi dx = \int_{G^+} \{\operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \Delta u \varphi\} dx = - \int_Q \tilde{f} \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(Q). \quad (3.42)$$

Ora sia  $v$  la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \int_{B_1} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{B_1} \tilde{f} \varphi, & \forall \varphi \in H_0^1(B_1) \\ v \in H_0^1(B_1) \end{cases}. \quad (3.43)$$

dal Teorema di Lax Milgram e dal Teorem 1.17, tenendo presente (3.41), si ha

$$\|v\|_{H^2(B_1)} \leq C_1 \|\tilde{f}\|_{L^2(B_1)} \leq C_1 \varepsilon, \quad (3.44)$$

dove  $C_1$  è una costante. Ora poniamo  $U = \tilde{u} - v$ . Da (3.42) e (3.43) abbiamo

$$\int_{B_1} \nabla U \cdot \nabla \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(B_1), \quad (3.45)$$

quindi

$$\Delta U = 0, \text{ in } B_1.$$

Ora si può facilmente verificare, poiché  $g \in C^2(\overline{B_1})$  e valgono le (3.30), che esiste  $r \in (0, \frac{1}{2})$  tale che  $B_r(-re_n) \subset G^-$ . Basta infatti scegliere  $r$  tale che

$$-r + \sqrt{r^2 - |x'|^2} \leq g(x').$$

Ora dalla formula di Taylor e da (3.30) si ha  $g(x') \geq -\frac{1}{2} \|D_{x'}^2 g\|_{L^\infty(B_1)} |x'|^2$ ,  
d'altra parte

$$-r + \sqrt{r^2 - |x'|^2} \leq -\frac{|x'|^2}{2r},$$

quindi basta che

$$r \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\|D_{x'}^2 g\|_{L^\infty(B_1)}} \right\}.$$

Ora, dalla (3.44) e tenendo presente che da (3.38) abbiamo  $\tilde{u} = 0$  in  $B_r(-re_n)$ ,  
otteniamo che

$$\|U\|_{L^2(B_r(-re_n))} \leq C_1 \varepsilon. \quad (3.46)$$

Infine, ricordando (3.35) si ha

$$\|U\|_{L^2(B_1)} \leq E + C_1 \varepsilon \quad (3.47)$$

e applicando alla funzione  $U$  la Proposizione 3.1 con  $d = 1 - R$  (integriamo  
ambo i membri di (3.28) su  $B_R$ ) abbiamo, per  $\frac{1}{2} \leq R < 1$ ,

$$\|U\|_{L^2(B_R)} \leq C_2 \varepsilon^{\eta'} (E + \varepsilon)^{1-\eta'}, \quad (3.48)$$

dove  $C_2 = C_1 \left(\frac{4R}{1-R}\right)^n$  e  $\eta' = \left(\frac{\log(4/3)}{\log 4}\right)^{2/(1-R)} \left(\frac{\log 4}{\log((1-R)(4r)^{-1})}\right)$ .

Quindi da (3.44) e (3.48) abbiamo

$$\|u\|_{L^2(B_R \cap G^+)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^2(B_R)} \leq \|U\|_{L^2(B_R)} + \|v\|_{L^2(B_R)} \leq 2C_2 \varepsilon^{\eta'} (E + \varepsilon)^{1-\eta'}.$$

In definitiva

$$\|u\|_{L^2(B_R \cap G^+)} \leq 2C_2 \varepsilon^{\eta'} (E + \varepsilon)^{1-\eta'}. \quad (3.49)$$

Naturalmente a partire da questa stima si può facilmente ottenere, per propagazione  
dell'errore, una stima h\"olderiana in  $Q' \cup G^+$  per ogni  $\bar{Q}' \subset Q$ .

### (c) Stabilit\`a nel caso generale.

Tenendo presente la definizione degli spazi  $H_{co}^{1/2}(\Sigma)$  e  $H_{co}^{3/2}(\Sigma)$  possiamo  
considerare  $\Sigma$  come una porzione della frontiera di un aperto  $\Omega$  tale che  $G^+ \subset \Omega$   
e considerare  $\Psi \in H^2(\Omega)$  (si tenga presente il Teorema 1.11) tale che  $\text{supp } \Psi \subset$   
 $\Omega \cup \Sigma$  e

$$\Psi|_\Sigma = \psi_0, \text{ e } \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}|_\Sigma = \psi_1 \text{ (nel senso delle tracce).}$$

Inoltre, le prime due disuguaglianze (3.36) implicano

$$\|\Psi\|_{H^2(G^+)} \leq C\varepsilon, \quad (3.50)$$

dove  $C$  dipende solo da  $\|g\|_{C^2(B_1)}$  (e, a rigore, anche da  $\Omega$  che per\`o qui consid-  
eriamo fissato).

Sia  $w = u - \Psi$  allora  $w \in H^2(G^+)$  e

$$\begin{cases} \Delta w = f - \Delta \Psi, & \text{in } G^+, \\ w = 0, & \text{su } \Sigma, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, & \text{su } \Sigma. \end{cases} \quad (3.51)$$

Ora da  $\|f\|_{L^2(G^+)} \leq \varepsilon$  (si ricordi la terza disuguaglianza in (3.36)) e da (3.50) abbiamo

$$\|f - \Delta \Psi\|_{L^2(G^+)} \leq C\varepsilon$$

e

$$\|w\|_{L^2(G^+)} \leq \|u\|_{L^2(G^+)} + \|u\|_{L^2(G^+)} \leq E + C\varepsilon.$$

Siamo quindi ricondotti al caso studiato nel punto (b) e possiamo pertanto asserire che

$$\|w\|_{L^2(B_R \cap G^+)} \leq C\varepsilon^{\eta'} (E + \varepsilon)^{1-\eta'}. \quad (3.52)$$

Ora, applicando la disuguaglianza triangolare e ricordando la (3.50) abbiamo

$$\|u\|_{L^2(B_R \cap G^+)} \leq \|w\|_{L^2(B_R \cap G^+)} + \|\Psi\|_{L^2(B_R \cap G^+)} \leq C\varepsilon^{\eta'} (E + \varepsilon)^{1-\eta'}. \quad (3.53)$$

dove  $C$  dipende solo da  $\|g\|_{C^2(B'_1)}$ .

Abbiamo quindi dimostrato

**Teorema 3.3.** *Sia  $g \in C^2(\overline{B'_1})$  e supponiamo che soddisfi a (3.29) e (3.30). Siano  $\psi_0 \in H_{co}^{3/2}(\Sigma)$ ,  $\psi_1 \in H_{co}^{1/2}(\Sigma)$  e  $f \in L^2(G^+)$ . Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in } G^+, \\ u = \psi_0, & \text{su } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi_1, & \text{su } \Sigma, \end{cases} \quad (3.54)$$

*ammette al più una soluzione in  $H^2(G^+)$ .*

*Inoltre, se  $\psi_0, \psi_1, f$  soddisfano*

$$\|\psi_0\|_{H^{3/2}(\Sigma)} \leq \varepsilon \quad \|\psi_1\|_{H^{1/2}(\Sigma)} \leq \varepsilon, \quad \|f\|_{L^2(G^+)} \leq \varepsilon \quad (3.55)$$

*e  $u$  soddisfa*

$$\|u\|_{L^2(G^+)} \leq E; \quad (3.56)$$

*allora per ogni  $Q'$  tale che  $\overline{Q'} \subset Q$  si ha*

$$\|u\|_{L^2(Q' \cup G^+)} \leq C\varepsilon^{\bar{\eta}} (E + \varepsilon)^{1-\bar{\eta}}, \quad (3.57)$$

*dove  $C$  e  $\bar{\eta} \in (0, 1)$  dipendono solo da  $\|g\|_{C^2(B'_1)}$  e da  $\text{dist}(Q', \partial Q)$ .*



## References

- [Al-R-Ro-Ve] G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset, S. Vessella, The stability for the Cauchy problem for elliptic equations, *Inverse Problems* 25 (2009), 1-47.
- [Br] H. Brezis, *Analisi funzionale*, Ed. Liguori, Napoli, 1986
- [Ev] L. C. Evans, *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [K-J-F] A. Kufner, O. John, S. Fučík, *Function spaces*. Noordhoff International Publishing, Leyden; Academia, Prague, 1977
- [Ne] J. Nečas, *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012