L'operatore di Laplace – brevi richiami.

1. Poniamo

$$(1) \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{N} \partial_j^2$$

$\left(\partial_j := \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$. Δ e' detto <u>operatore di Laplace</u> o <u>laplaciano</u>.

Diremo che $u \in C^2(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, e' <u>armonica in Ω</u> se soddisfa l'<u>equazione di Laplace</u>

$$(2) \qquad \Delta u(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega .$$

2. <u>Proprietà della media</u>.

Si dice che una funzione $v \in C^0(\Omega)$ gode della proprietà della media in Ω se

$$(3) \qquad v(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} v(y)\, dS_y \, , \quad \text{per ogni } x, r \text{ t.c. } \overline{B_r(x)} \subset \Omega .$$

(misura di $\partial B_r(x)$)

Si verifica facilmente che la (3) – 1 e' equivalente a

$$(4) \qquad v(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} v(y)\, dy \, , \quad \text{per ogni } x, r \text{ t.c. } \overline{B_r(x)} \subset \Omega .$$

<u>Teorema 1</u>

Se $v \in C^0(\Omega)$ soddisfa la proprietà della media allora $v \in C^\infty(\Omega)$.

Teorema 2

Se $u \in C^2(\Omega)$ è una funzione armonica in Ω allora u soddisfa la proprietà della media in Ω.

Quindi

$$u \text{ armonica in } \Omega \Longrightarrow u \in C^\infty(\Omega).$$

Vale anche il viceversa del teorema 2, più esattamente abbiamo il

Teorema 3

se $u \in C^0(\Omega)$ e u soddisfa la proprietà della media in Ω allora u è armonica in Ω.

3. Esempi di funzioni armoniche

Gli esempi più semplici(*) di funzioni armoniche si possono trovare a partire da

$$(1) \qquad u(x) = e^{\zeta \cdot x} \qquad \text{con} \quad \zeta \in \mathbb{C}^N$$

(naturalmente (1) - 2 è a valori complessi)

dove

$$(2) \qquad \zeta \cdot x = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j \, x_j \, .$$

Deriviamo la (1); abbiamo

(*) Naturalmente le funzioni polinomiali di primo grado sono armoniche.

$$\partial_j u = \zeta_j \, e^{\zeta \cdot x} \quad , \quad \partial_j^2 u = \zeta_j^2 \, e^{\zeta \cdot x} .$$

Quindi

$$\Delta u = \Big(\sum_{j=1}^{N} \zeta_j^2 \Big) e^{\zeta \cdot x} .$$

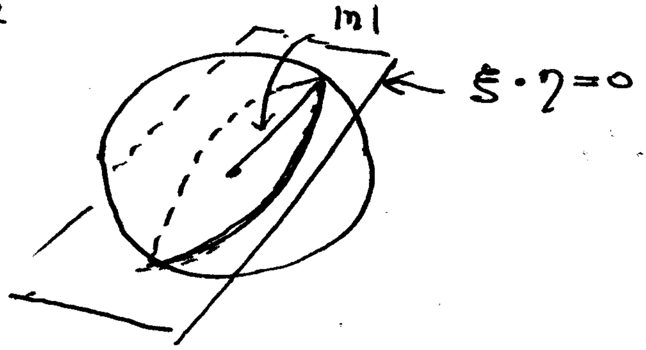
Basta quindi richiedere che, posto $\zeta_j = \xi_j + i \eta_j$, $j = 1, \dots, N$ con $\xi_j, \eta_j \in \mathbb{R}$, si abbia

$$0 = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j^2 = |\xi|^2 - |\eta|^2 + 2i \, \xi \cdot \eta$$

ovvero

$$(1) \qquad \begin{cases} |\xi|^2 - |\eta|^2 = 0 \\ \xi \cdot \eta = 0 . \end{cases}$$

È evidente che (1)-3 ha soluzioni non banali (intersezione della sfera di centro 0 e raggio $|\eta|$ con l'iperpiano $\{ \xi \,/\, \xi \cdot \eta = 0 \}$).



Ad esempio in $\mathbb{R}^2$ si ha, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, che
che

$$(2) \qquad u = e^{i \alpha x_1} \, e^{\alpha x_2}$$

è soluzione dell'equazione di Laplace.

Soluzioni radiali dell'equazione di Laplace.

Le funzioni del tipo

$$u(x) = f(|x|)$$

con $f \in C^2((0,+\infty))$, sono soluzioni dell'equazione di Laplace in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ se e solo se

$$(\Delta u)(x) = \left(f''(t) + \frac{N-1}{t} f'(t) \right)\Big|_{t=|x|} = 0$$

e quindi si ha

$$f(t) = \begin{cases} c_1 \log t + C_2 & \text{se } N=2 \\ c_1\, t^{2-N} + C_2, & \text{se } N>2. \end{cases}$$

Si chiama soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace la funzione

$$(1) \qquad \Phi_N(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{se } N=2 \\ \frac{1}{(N-2)\omega_N} |x|^{2-N}, & \text{se } N>2, \end{cases}$$

dove ω_N è la misura della sfera N-dimensionale di raggio 1.

Si dimostra che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_N(x)\, \Delta\varphi(x)\, dx = -\varphi(0), \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Vale anche il

Teorema 4

Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ e sia

(1) $u(x) = (\Phi_N * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_N(x-y)\, f(y)\, dy$

allora

(i) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$

(ii) $\Delta u(x) = -f(x)$ in $\mathbb{R}^N$

Ad esempio se $N = 3$ la (1) - 5 fornisce

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy$$

che (se $f \geq 0$) rappresenta il potenziale newtoniano del corpo $D = \operatorname{supp} f$ di densità $f(x)$.

4. Principio di massimo e unicità per il problema di Dirichlet

Teorema 5

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^0(\overline{\Omega})$ una funzione armonica in Ω allora

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \text{e} \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u .$$

Inoltre se Ω è connesso (non necessariamente limitato) e u è armonica in Ω accade che se esiste $x_0 \in \Omega$

tale che $u(x_0) = \sup\limits_{\Omega} u$ $\left(\text{o} \quad u(x_0) = \inf\limits_{\Omega} u \right)$ allora

u è costante in Ω.

$\longleftrightarrow$

Dal principio di massimo segue che se Ω limitato e $u, v \in C^0(\overline{\Omega})$ allora

$$(1) \qquad \max_{\overline{\Omega}} |u-v| \leq \max_{\partial\Omega} |u-v| .$$

Quindi il problema di Dirichlet

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \\ u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

ha al più una soluzione.

La (1)-6 si dimostra immediatamente. Sia, infatti $w = u - v$ allora $\Delta w = 0$ quindi

$$w(x) \leq \max_{\partial\Omega} w \leq \max_{\partial\Omega} |w|$$

$$w(x) \geq \min_{\partial\Omega} w \geq -\max_{\partial\Omega} |w|$$

da cui la (1)-6.

Dalla (1)-6 segue che se $\varphi = 0$ allora $u = 0$ (unicità del problema di Dirichlet (2)-6), ma anche che si può controllare l'errore su u a partire dall'errore su φ. Più precisamente si ha

Vale anche il

Teorema 4

Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ e sia

(1) $u(x) = (\Phi_N * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi_N(x-y) f(y) dy$

allora

(i) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$

(ii) $\Delta u(x) = -f(x)$ in $\mathbb{R}^N$

Ad esempio se $N = 3$ la (1) - 5 fornisce

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy$$

che (se $f \geq 0$) rappresenta il potenziale newtoniano del corpo $D = \operatorname{supp} f$ di densità $f(x)$.

4. Principio di massimo e unicità per il problema di Dirichlet

Teorema 5

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^0(\bar{\Omega})$ una funzione armonica in Ω allora

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \text{e} \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u .$$

Inoltre se Ω è connesso (non necessariamente limitato) e u è armonica in Ω accade che se esiste $x_0 \in \Omega$

tale che $u(x_0) = \sup_{\Omega} u$ $\quad$ (o $u(x_0) = \inf_{\Omega} u$) allora

u è costante in Ω.

$$\longleftrightarrow$$

Dal principio di massimo segue che se Ω limitato e $u, v \in C^0(\overline{\Omega})$ allora

(1) $$\max_{\overline{\Omega}} |u-v| \le \max_{\partial\Omega} |u-v| .$$

Quindi il <u>problema di Dirichlet</u>

(2) $$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \\ u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

ha <u>al più</u> <u>una soluzione</u>.

La (1)-6 si dimostra immediatamente. Sia, infatti $w = u - v$ allora $\Delta w = 0$ quindi

$$w(x) \le \max_{\partial\Omega} w \le \max_{\partial\Omega} |w|$$

$$w(x) \ge \min_{\partial\Omega} w \ge - \max_{\partial\Omega} |w|$$

da cui la (1)-6.

Dalla (1)-6 segue che se $\varphi = 0$ allora $u = 0$ (unicità del problema di Dirichlet (2)-6), ma anche che si può controllare l'errore su u a partire dall'errore su φ. Più precisamente si ha se $\varphi_1, \varphi_2 \in C^0(\partial\Omega)$ e u_1, u_2 sono soluzioni dei problemi di Dirichlet, $j=1,2$

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0 & \text{in } \Omega \\ u_j = \varphi_j & \text{su } \partial\Omega \\ u_j \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

allora

(1) $$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)} .$$

5. Teorema di Esistenza per il problema di Dirichlet.

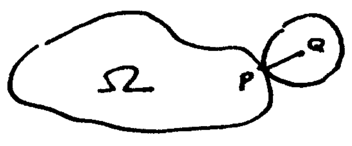
Teorema 6

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato che gode della proprietà della sfera esterna e sia $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \\ u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione.

Per proprietà della sfera esterna si intende che $\forall P \in \partial\Omega \quad \exists B_r(Q)$ t.c. $B_r(Q) \cap \overline{\Omega} = \{P\}$.



Dal teorema 6 e dalla (1)-7 abbiamo che

> Il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ che goda della proprietà della sfera esterna è <u>ben posto secondo Hadamard</u>.

6. <u>Analiticità delle funzioni armoniche. Principio di riflessione</u>

Vale il seguente

<u>Teorema</u> 7

Sia u una funzione armonica in Ω e sia $x_0 \in \Omega$. Allora per ogni $r > 0$ t.c.

$\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ si ha

$$(1) \qquad |D^\alpha u(x_0)| \leq c\,(2^{N+1} N k)^k \, \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

con $k = |\alpha|$ e c costante indipendente da N.

Dal teorema 7 segue che

$$(2) \qquad \boxed{\text{Se } u \text{ è armonica in } \Omega \text{ allora } u \text{ è analitica in } \Omega}$$

Da (2)-8 segue che le funzioni armoniche godono della proprietà del prolungamento unico. In particolare:

$\{u$ armonica in Ω (connesso) e $u=0$ in D $(D\subset\Omega$, D aperto$\} \Longrightarrow \{u\equiv 0$ in $\Omega\}$.

Tuttavia nella continuazione di una funzione armonica a partire da un aperto D in un aperto Ω piccoli errori su u in D possono produrre errori incontrollabili in punti $x\in\Omega\setminus\overline{D}$.

Esempio:

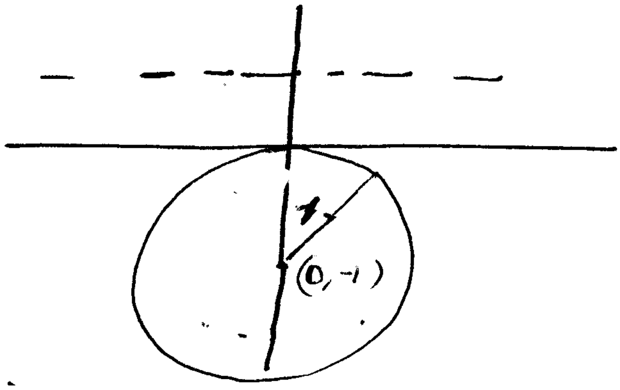
Sia $N=2$ e sia

$$u_\alpha(x_1,x_2)=\frac{1}{\alpha}\, e^{i\alpha x_1}\, e^{\alpha x_2}, \qquad \alpha>0$$

(o se si preferisce, $u_\alpha = Re\{e^{i\alpha x_1} e^{\alpha x_2}\}$)

Come abbiamo visto nel §3, u_α è armonica in $\mathbb{R}^2$.

Si ha



$$\|u_\alpha\|_{L^\infty(B_1(0,-1))}=\frac{1}{\alpha}$$

ma

$$|u_\alpha(x_1,x_2)|=\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x_2}\longrightarrow +\infty \text{ per } \alpha\to+\infty \text{ quando } x_2>0.$$

Ora enunciamo e dimostriamo il seguente

<u>Teorema</u> 8 (Principio di riflessione)
Indichiamo con

$$B_r^+(0)=\{(x',x_N)\in B_r(0)\ /\ x_N>0\}$$

(i) Sia $u\in C^0(\overline{B_r^+(0)})\cap C^2(B_r^+(0))$ tale che

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } B_r^+(0)\\ u(x',0)=0 & \text{se } |x'|\le r\end{cases}$$

e definiamo $\tilde{u}\in C^0(\overline{B_r(0)})$ come segue (estensione dispari di u rispetto a x_N)

$$\tilde{u}(x',x_N)=\begin{cases}u(x',x_N) & \text{se } x_N\ge 0\\ -u(x',-x_N) & \text{se } x_N<0\end{cases}$$

allora $\tilde{u}$ è armonica in $B_r(0)$.

(ii) Sia $u\in C^1(\overline{B_r^+(0)})\cap C^2(B_r^+(0))$ tale che

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } B_r^+(0)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_N}(x',0)=0 & \text{se } |x'|\le r\end{cases}$$

sia $\overline{u}$ tale che

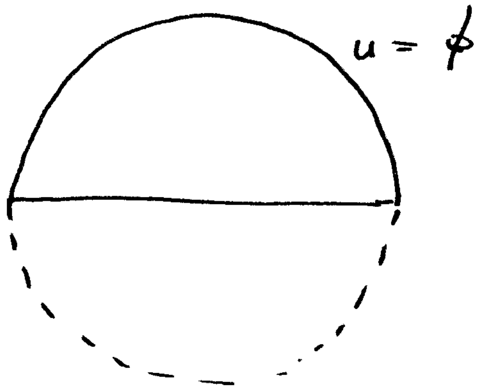
$$\overline{u}(x',x_N)=\begin{cases}u(x',x_N) & \text{se } x_N\geqslant 0\\ u(x',-x_N) & \text{se } x_N<0\end{cases}$$

(estensione pari di u rispetto a x_N), allora u è armonica in $B_r(0)$.

Dimostrazione

(i) Sia $\phi = u /(\partial B_r(0)) \cap R^N_+$

e sia $\tilde{\phi}$ la sua estensione pari rispetto a x_N.



Consideriamo v tale che

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta v & \text{in } B_r(0) \\ v = \tilde{\phi} & \text{su } \partial B_r(0) \\ v \in C^0(\overline{B_r}(0)) \cap C^2(B_r(0)), \end{cases}$$

v esiste (cfr. Teorema 6 e) ed è unica.

Inoltre $v(x', x_N)$ è dispari rispetto a x_N. Infatti sia

$$(2) \qquad w(x', x_N) = v(x', x_N) + v(x', -x_N)$$

si ha

$$w(x', x_N) = \tilde{\phi}(x', x_N) + \tilde{\phi}(x', -x_N) = 0 \quad , \text{per } (x', x_N) \in \partial B_r(0)$$

e, come si verifica facilmente,

$$\Delta w = 0 \qquad \text{in } B_r(0)$$

Quindi

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } B_r(0) \\ W = 0 & \text{su } \partial B_r(0) \\ w \in C^0(\overline{B}_r) \end{cases} \Longrightarrow \quad W \equiv 0 \ \text{ in } B_r(0)$$

da cui segue che $v(x', x_N)$ è <u>dispari rispetto</u> a x_N. In particolare si ha

$$v(x', 0) = 0 \qquad \text{per} \quad |x'| \le r$$

Ora consideriamo $u - v$ in $B_r^+(0)$, abbiamo

$$\begin{cases} \Delta (u-v) = 0 & \text{in } B_r^+(0) \\ (u-v)(x', 0) = 0 & \text{per } |x'| \le r \\ (u-v)(x', x_N) = 0 & \text{per } (x', x_N) \in (\partial B_r) \cap \mathbb{R}^N_+ \end{cases}$$

e applicando il principio di massimo in B_r^+ abbiamo $u - v \equiv 0$ in $B_r^+(0)$. Quindi

$$\tilde{u} = v \qquad \text{in} \quad B_r(0)$$

e siccome v è armonica anche $\tilde{u}$ è armonica.

(ii) La dimostrazione è, per la prima parte, analoga a quella di (i) pur di sostituire a $\tilde{\phi}$ la $\bar{\phi}$, estensione pari di ϕ, nella (1)-11. Si ha analogamente a (i) che la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_r(0) \\ v = \bar{\phi} & \text{su } \partial B_r(0) \end{cases}$$

è pari rispetto a x_N: basta verificare che

$$w = v(x', x_N) - v(x', -x_N)$$

soddisfa a

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } B_r(0) \\ w = 0 & \text{su } \partial B_r(0) \end{cases}$$

Si ha, in particolare

(1) $$\frac{\partial}{\partial x_N} v(x', 0) = 0 \qquad \text{per} \quad |x'| \le r.$$

Ora, poniamo

$$U = u - v \qquad \text{in} \quad B_r^+(0),$$

abbiamo che $$U \in C^1\left(\overline{B_r^+(0)}\right),$$

$$U = 0 \qquad \text{su } (\partial B_r) \cap \mathbb{R}^N_+$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_N}(x', 0) = 0 \quad \text{per } |x'| \le r$$

e naturalmente

$$\Delta U = 0 \qquad \text{in } B_r^+(0).$$

Quindi

$$\int_{B_r^+(0)} |\nabla U|^2 dx = \int_{B_r^+} \{\mathrm{div}(U \nabla U) - U \Delta U\} dx$$

$$= \int_{B_r^+} \mathrm{div}(U \nabla U)\, dx = \int_{\partial B_r^+} U \frac{\partial U}{\partial \nu} dx = 0.$$

(normale esterna)

Quindi U è costante in $B_r^+(0)$, ma $U=0$ su $(\partial B_r)\cap \mathbb{R}^N_+$ perciò $U=0$ in $B_r^+(0)$.
In definitiva

$$u = v \quad \text{in } B_r^+(0)$$

e quindi

$$\overline{u} = v \quad \text{in } B_r(0)$$

da cui segue che $\overline{u}$ è armonica in $B_r(0)$. □

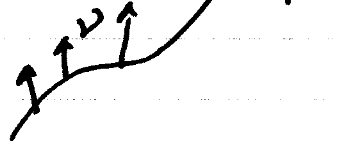
7. Il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace

Per semplicità consideriamo la situazione bidimensionale. Alla fine del paragrafo daremo dei risultati più generali.

Indichiamo con (x,y) le coordinate di un punto di $\mathbb{R}^2$.

Nel problema di Cauchy per l'equazione di Laplace siamo interessati a determinare una funzione u tale che, detta Γ una curva sufficientemente regolare di $\mathbb{R}^2$,

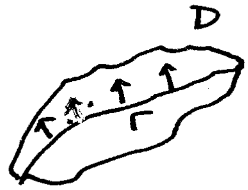
$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in un certo } D \text{ aperto } D \supset \overset{\circ}{\Gamma} \\ u = \psi_0 & \text{su } \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi_1 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$



dove ν è un campo di vettori **non** tangenziali a Γ e ψ_0, ψ_1 sono funzioni assegnate su Γ

L'aperto D in cui è definita u dipende da Γ, ψ_0 e ψ_1.

Il teorema di Cauchy - Kowalevskaja assicura che se Γ è analitica, ν è il campo di vettori unitari normali a Γ, ψ_0 e ψ_1 sono analitiche allora il problema di Cauchy ammette una soluzione analitica u e tale soluzione è unica nella classe delle funzioni analitiche.

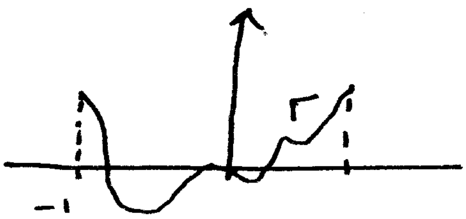


Ora, la classe delle funzioni analitiche è davvero una classe troppo ristretta per quanto riguarda l'unicità. Questo inconveniente viene superato dal teorema di Holmgren che enunciamo qui di seguito.
Per maggior chiarezza supponiamo che Γ sia il grafico di una funzione

$$g : [-1,1] \to \mathbb{R},$$

tale che

$$g(0) = 0.$$



Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$, indichiamo con $\Omega_\Gamma^+ = \Omega \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y > g(x)\}$.

Sia $r_0 = \min\{\mathrm{dist}((0,0), (-1, g(-1))), \mathrm{dist}((0,0), (1, g(1)))$

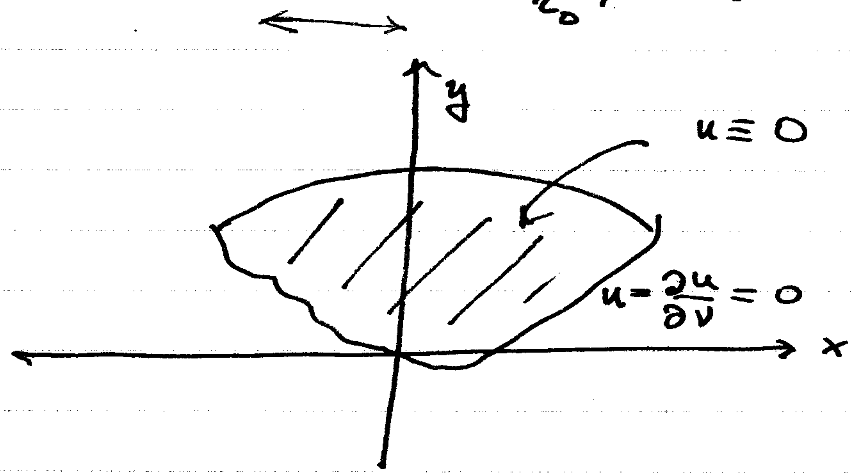
Teorema di Holmgren

Sia $g \in C^2([-1,1])$ allora, se

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^+_{r_0,\Gamma} \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \Gamma \\ u \in C^2(\overline{B^+_{r_0,\Gamma}}) \end{cases}$$

abbiamo

$$u \equiv 0 \quad \text{in } B^+_{r_0,\Gamma}.$$



Quindi nel teorema di Holgren si indeboliscono due ipotesi, riguardo all'unicità:

(a) la regolarità di Γ (da analitica per Cauchy-Kowalevskaja a C^2 per Holmgren)

(b) la regolarità di u (da analitica per Cauchy-Kowalevskaja a C^2 per Holmgren).

Ora consideriamo il problema di Cauchy nel caso particolare in cui $g(x)=0$. Il problema si può formulare come segue: determinare u tale che

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } y>0 \\ u(x,0) = \psi_0(x) & \text{per } |x|\le 1 \\ u_y(x,0) = \psi_1(x) & \text{per } |x|\le 1 \end{cases}$$

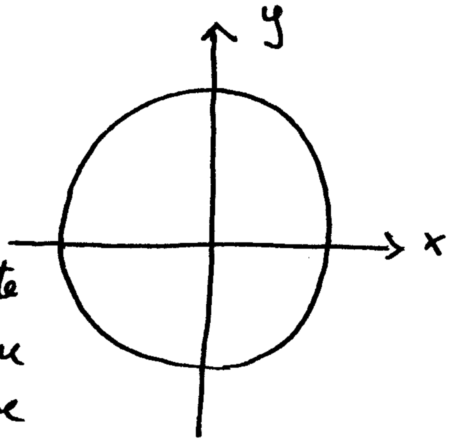
(abbiamo scelto $\nu = (0,1)$).

Utilizzando il principio di riflessione abbiamo facilmente che

se $u \in C^1(\overline{B_1^+(0)}) \cap C^2(B_1^+(0))$ è soluzione di (1) con $\psi_0 = \psi_1 = 0$ allora $u \equiv 0$ in $B_1^+(0)$.

Infatti sia

$$w = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \bar{u}) \quad \text{in } B_1(0)$$



dove $\tilde{u}$ e $\bar{u}$ sono rispettivamente l'estensione dispari e l'estensione pari di $u(x,y)$ rispetto a y, dove

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } y>0 \\ u(x,0)=0 & |x|\le 1 \\ u_y(x,0)=0 & |x|\le 1 . \end{cases}$$

Dal teorema 8 abbiamo che $\tilde{u}$, $\bar{u}$ e quindi w <u>sono armoniche</u> in $B_1(0)$ inoltre

$$w(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \text{in } B_1^+(0) \\ 0 & \text{in } B_1^-(0), \end{cases}$$

ma essendo w armonica essa è analitica (teorema 7) e quindi, da $w = 0$ in $B_1^-(0)$ segue che $w \equiv 0$ in $B_1(0)$ e quindi $u \equiv 0$.

Il principio di riflessione consente anche di vedere facilmente che l'esistenza per il problema (1)-17 richiede una compatibilità fra i dati ψ_0, ψ_1 che, quindi, non possono essere assegnati arbitrariamente. Spieghiamo meglio. Consideriamo il problema con $\psi_1 = 0$, cioè

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1^+(0) \\ u(x,0) = \psi_0(x), & |x| \leq 1 \\ u_y(x,0) = 0, & |x| \leq 1 \\ u \in C^1(\overline{B_1^+}). \end{cases}$$

Dal principio di riflessione si ha che la riflessione pari $\bar{u}$ di u è armonica in $B_1(0)$. <u>Quindi</u> $\bar{u}$ è analitica in $B_1(0)$ e pertanto

$$\psi_0(x) = \bar{u}(x,0)$$

<u>è necessariamente analitica</u>. Una situazione analoga si presenta quando $\psi_0 = 0$. Similmente si può vedere che ψ_0 e ψ_1 non possono essere assegnati arbitrariamente. La linea di ragionamento (che richiederebbe ulteriori precisazioni) è essenzialmente la seguente: Sia u_0 una funzione armonica tale che $u(x,0) = \psi_0(x)$. Ad esempio u_0 può essere data dalla soluzione del problema di Dirichlet

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{in } B_1^+ \\ u(x,y) = \varphi & \text{su } (\partial B_1) \cap \mathbb{R}^2_+ \\ u(x,0) = \psi_0 & \text{per } |x| \leq 1, \end{cases}$$

dove φ è una qualsiasi funzione continua su $(\partial B_1) \cap \mathbb{R}^2_+$ e tale che $\varphi(-1,0) = \psi_0(-1)$, $\varphi(1,0) = \psi_0(1)$ (queste condizioni assicurano che il dato al bordo del pb. di Dirichlet (1)-19 sia in $C^0(\partial(B_1^+))$.

Si considera $u - u_0$ e si ha

$$\begin{cases} \Delta (u - u_0) = 0 & \text{in } B_1^+ \\ (u - u_0)(x,0) = 0 & \text{per } |x| \leq 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(u - u_0)(x,0) = \psi_1(x) - \dfrac{\partial}{\partial y} u_0(x,0), & \text{per } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Quindi, affinché esista $u \in C^1(\overline{B_1^+}) \cap C^2(B_1^+)$ soluzione di (1)-17 $\Rightarrow$ $\psi_1(x) - \dfrac{\partial}{\partial y} u_0(x,0)$ <u>deve necessariamente essere una funzione analitica</u>.

Per completare e rendere rigoroso il discorso precedente occorrerebbe far vedere che la condizione che $\psi_1(x) - \frac{\partial}{\partial y} u_0(x,0)$ sia analitica non dipenda da φ e che, naturalmente, $\frac{\partial}{\partial y} u_0(x,0)$ esista. Omettiamo queste ulteriori considerazioni.

Esempio di Hadamard

Sia

$$u_K(x,y) = e^{-\sqrt{K}} \operatorname{sen} Kx \cosh Ky ,$$

abbiamo

$$\begin{cases} \Delta u_K = 0 \\ u_K(x,0) = e^{-\sqrt{K}} \operatorname{sen} Kx \\ \dfrac{\partial u_K}{\partial y}(x,0) = 0 . \end{cases}$$

Quindi

$$\left.\begin{array}{l} \| u_K(\cdot, 0) \|_{C^m([-1,1])} \longrightarrow 0 \\ \| \partial_y u_K(\cdot,0) \|_{C^m([-1,1])} = 0 \end{array}\right\} \forall m \in \mathbb{N}$$

e

$$\| u_K(\cdot, y) \|_{L^2(-1,1)} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } y \neq 0 .$$

Perciò: piccoli errori (anche in $C^m([-1,1])$) sui dati possono produrre errori incontrollabili sulla soluzione del problema di Cauchy.

Per concludere, segnaliamo che le considerazioni svolte in questo paragrafo si possono fare anche nel caso N-dimensionale. In questo caso invece di partire da

una curva Γ si partirà da una superficie analitica.
In particolare, quando Γ è il grafico di una funzione g, g sarà definita in $B_n'(0)$ a valori in $\mathbb{R}$.
I teoremi di Cauchy-Kowalevskaja e il teorema di Holmgren valgono anche per operatori più generali purché la curva (o la superficie) Γ sia non caratteristica. Ad esempio, in $\mathbb{R}^N$,

$$(1) \qquad Pu = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) D^\alpha u + \sum_{|\alpha|\leq 1} b_\alpha(x) D^\alpha u$$

è un operatore del secondo ordine e se la superficie iniziale Γ è una porzione dell'insieme di livello $(\neq \emptyset)$ $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \varphi(x) = 0\}$ con $\nabla\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Gamma$ diremo che Γ è una superficie caratteristica in $x_0 \in \Gamma$ per P

$$(2) \qquad \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x_0) \left(\nabla\varphi(x_0)\right)^\alpha = 0$$

e diremo che Γ è non caratteristica per P se

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \left(\nabla\varphi(x)\right)^\alpha \neq 0 \qquad \forall x \in \Gamma .$$

Ad esempio se $Pu = \Delta u$ tutte le superfici (o curve nel caso bidimensionale) sono <u>non</u> caratteristiche.

<u>Teorema di Cauchy-Kowalevskaja</u>

Supponiamo che φ sia una funzione analitica reale e sia Γ una porzione (aperta nella topologia indotta) di $\{x \in \mathbb{R}^N \mid \varphi(x) = 0\} \neq \emptyset$. Se

(i) $\nabla\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Gamma$

(ii) Γ è non caratteristica per P

(iii) a_α, per $|\alpha|=2$ e b_α, per $|\alpha|=1$ sono funzioni analitiche in un intorno di Γ

(iv) ψ_0, ψ_1 sono due funzioni analitiche su Γ

(v) f funzione analitica in un intorno di Γ,

allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Pu = \\ u = \psi_0 & \text{su } \Gamma \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi_1 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

dove $\nu = \dfrac{\nabla \varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}$, ammette una ed una sola soluzione nella classe delle funzioni analitiche.

<u>Teorema di Holmgren</u>

Siano $\varphi \in C^2(\Omega)$ (Ω aperto di $\mathbb{R}^N$), $\Gamma = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) = 0\}$, $x_0 \in \Gamma$.

Siano a_α, $|\alpha|=2$, b_α, $|\alpha|\le 1$ analitiche in Ω e supponiamo che

(i) $\nabla\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Gamma$

(ii) Γ non caratteristica per P.

Allora se $(r>0)$

$$\begin{cases} Pu = 0 \text{ in } \underset{\uparrow \text{chiusura}}{cl}\Big(\overbrace{B_r(x_0) \cap \{x\in\Omega \mid \varphi(x) > 0\}}^{D}\Big) \\ u = 0 \quad \text{su } \Gamma \cap \overline{D} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \Gamma\cap\overline{D} \\ u \in C^2(\overline{D}) \end{cases}$$

$\left(\nu = \dfrac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}\right)$ abbiamo che

$$u = 0 \quad \text{in } D.$$

8. Alcune formule per il laplaciano.

Ritorniamo all' operatore di Laplace per fornire alcune formule utili.

Intanto ricordiamo che se $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale con $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ allora

$$(1) \qquad \int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, dS \qquad \text{(teorema della divergenza)}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato con frontiera di classe C^1 e ν è il versore normale esterna a $\partial\Omega$.

Dalla (1)-23 abbiamo, per $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} v \, \Delta u \, dx = \int_{\Omega} \{ \operatorname{div}(v \nabla u) - \nabla v \cdot \nabla u \} dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

poiché una formula analoga vale per $\int_{\Omega} u \, \Delta v \, dx$, abbiamo

$$(2) \qquad \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left\{ v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} dS .$$

(Formula di Green).

La (2)-23 vale anche se $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e $\Delta u, \Delta v \in L^1(\Omega)$.

<u>Identità di Stokes</u>

Sia $u \in C^2(\bar{\Omega})$ (o anche $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ con $\Delta u \in L^\infty(\Omega)$) allora

(1) $$u(x) = -\int_\Omega \Phi_N(y-x)\,\Delta u(y)\,dy +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left\{ \Phi_N(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\Phi_N(y-x) \right\} dS_y$$

$$\forall x \in \Omega$$

dove Φ_N è definita da (1)-4 (soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace).

Notare che: <u>direttamente</u> dalla (1)-24 <u>non</u> possiamo ottenere una soluzione del problema di Dirichlet

(2) $$\begin{cases} \Delta u = -f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \\ u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

infatti nella (1)-24 appare, a destra, Δu che è uguale a $-f$, u su $\partial\Omega$ che è dato da φ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ che <u>NON</u> è fornito esplicitamente da (2)-24.

E' per questo che si introduce la funzione di Green. Vediamo in che modo. Sia $x \in \Omega$ fissato e introduciamo una funzione $\phi^x(y)$ che chiamiamo <u>correttore</u> (o funzione di Robin) di cui supponiamo l'esistenza in quanto soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_y \phi^x(y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \phi^x(y) = \Phi_N(y-x) & \text{se } y \in \partial\Omega \end{cases}$$

(si noti che $y \longrightarrow \Phi_N(y-x)$ non ha singolarità su $\partial\Omega$ perché $x \notin \partial\Omega$).

Applicando la formula di Green (2)-23 a $v = \phi^x(\cdot)$ e u e sottraendo membro a membro la formula così ottenuta e l'identità di Stokes (omettiamo i passaggi) si giunge a

(1) $$u(x) = -\int_\Omega G(x,y)\,\Delta u(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\,u(y)\,dS_y$$

dove

(2) $$G(x,y) = \Phi_N(y-x) - \phi^x(y).$$

La funzione G è chiamata la funzione di Green per Δ in Ω.

Dalla (1)-25 abbiamo, dunque, che se $u \in C^1(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega)$ è tale che

$$\begin{cases} \Delta u = -f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

allora

(3) $$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\,f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\,dS_y .$$

Si dimostra che G <u>è simmetrica</u>, più precisamente

$$G(x,y) = G(y,x) \quad , \text{per } x, y \in \Omega, \, x \neq y.$$

<u>Si tenga presente</u> che per costruire la funzione di Green bisogna costruire il correttore $\phi^x(\cdot)$. Questa costruzione è particolarmente agevole se Ω ha una geometria "semplice" per esempio nel caso di un semispazio e di una sfera. Qui ci limitiamo a fornire la formula finale (formula di Poisson) nel caso di una sfera.

<u>Teorema</u> (formula di Poisson per la sfera)
Sia $\varphi \in C^0(\partial B_R(0))$ e sia

$$(1) \qquad u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N} \, dS_y$$

allora u è soluzione del problema di Dirichlet

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \\ u \in C^0(\overline{B}_R(0)) \cap C^2(B_R(0)). \end{cases}$$

Anche se omettiamo la dimostrazione del teorema segnaliamo che la formula (1)-26 è ottenuta indipendentemente dal teorema 6 di esistenza (cfr. pag. 7)