

# Cenni di analisi funzionale e teoria degli operatori compatti

Elisa Francini e Sergio Vessella

## 1 Un po' di analisi funzionale

### 1.1 Spazi, norme e prodotti scalari

**Definizione 1.1** Sia  $X$  uno spazio vettoriale su  $\mathbf{R}$ . Si chiama norma un'applicazione  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbf{R}$  tale che

1.  $\|x\| \geq 0$  per ogni  $x \in X$ , e  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  per ogni  $\lambda \in \mathbf{R}$  e  $x \in X$ ,
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  per ogni  $x, y \in X$ .

Si definisce

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

la distanza su  $X$  e lo spazio  $X$  con la topologia indotta da questa distanza si dice uno spazio normato.

Uno spazio normato completo si dice uno spazio di Banach.

**Definizione 1.2** Dato uno spazio vettoriale  $X$ , si chiama prodotto scalare su  $X$  un'applicazione

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$$

tale che

1.  $(x, x) \geq 0$  per ogni  $x \in X$ , e  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
2.  $(x, y) = (y, x)$  per ogni  $x, y \in X$ ,
3.  $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$  per ogni  $x, y, z \in X$  e  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ,
4. vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)} \text{ per ogni } x, y \in X.$$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implica che  $\sqrt{(x, x)}$  è una norma su  $X$ . Uno spazio con prodotto scalare che risulta completo rispetto alla norma definita dal prodotto scalare si dice uno spazio di Hilbert.

Ricordiamo inoltre l'identità del parallelogramma

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)$$

e

$$(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Diciamo che  $x$  e  $y$  sono ortogonali se  $(x, y) = 0$ . Se  $M$  è un sottospazio di  $X$  definiamo l'ortogonale  $M^\perp$  di  $M$  come

$$M^\perp = \{x \in X : (x, y) = 0, \quad \forall y \in M\}.$$

$M^\perp$  è chiuso.

## 1.2 Operatori lineari

Siano  $X$  e  $Y$  due spazi normati con norme  $\|\cdot\|_X$  e  $\|\cdot\|_Y$  rispettivamente e sia

$$A : X \rightarrow Y$$

un operatore lineare.

Ricordiamo che  $A$  è continuo se e solo se  $\exists C \geq 0$  tale che

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ per ogni } x \in X.$$

Indichiamo con  $\mathcal{L}(X, Y)$  lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari continue da  $X$  in  $Y$ . Su questo spazio vettoriale si può definire

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y,$$

che risulta una norma su  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Si può anche mostrare, usando la linearità di  $A$ , che

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

Ricordiamo qui alcuni risultati sugli operatori lineari.

**Proposizione 1.3** *Se  $Y$  è uno spazio di Banach, allora  $\mathcal{L}(X, Y)$  con la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$  è uno spazio di Banach.*

**Teorema 1.4 Teorema dell'applicazione aperta.** *Siano  $X$  e  $Y$  due spazi di Banach e sia  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Se  $A$  è suriettivo esiste  $c > 0$  tale che*

$$A(B_1^X(0)) \supset B_c^Y(0) \tag{1}$$

dove  $B_r^X(0) = \{x \in X : \|x\|_X < r\}$ .

**Corollario 1.5** *Se  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  è biiettivo, allora  $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ .*

*Dim. del Corollario* Da (1) si ha

$$\|Ax\|_Y < c \Rightarrow Ax \in A(B_1(0))$$

ma  $A$  è iniettivo, quindi  $x \in B_1(0)$ , perciò

$$\|Ax\|_Y < c \Rightarrow \|A^{-1}(Ax)\|_X = \|x\|_X < 1.$$

□

**Teorema 1.6 Teorema di Banach - Steinhaus** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi di Banach e sia  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$  una famiglia (non necessariamente numerabile) di operatori lineari e continui di  $X$  in  $Y$ . Supponiamo che

$$\sup_{\alpha \in \Gamma} \|T_\alpha x\|_Y < +\infty \text{ per ogni } x \in X,$$

allora

$$\sup_{\alpha \in \Gamma} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

**Corollario 1.7** Siano  $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$  tali che per ogni  $x \in X$  la successione  $\{T_n x\}$  converga per  $n \rightarrow \infty$ . Se chiamiamo

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \text{ per } x \in X,$$

allora  $T$  è lineare e

1.  $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty$ ,
2.  $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ,
3.  $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ .

*Dim. del Corollario.* È immediato verificare che  $T$  è una applicazione lineare. Inoltre per ogni  $x \in X$  la successione delle norme  $\|T_n x\|$  è limitata, quindi, per il Teorema di Banach - Steinhaus si ha 1.

Si può inoltre osservare che

$$\|Tx\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|,$$

da cui seguono 2 e 3.

### 1.3 Richiami sugli spazi di Hilbert

**Teorema 1.8 Teorema della proiezione** Sia  $C \subset H$ ,  $H$  spazio di Hilbert,  $C$  chiuso, convesso e non vuoto. Allora, per ogni  $x \in H$  esiste un unico  $y \in C$  tale che

$$\|x - y\| = \min\{\|x - u\| : u \in C\}.$$

Questo unico punto  $y$  (che indicheremo con  $P_C x$ ) è detto la proiezione di  $x$  su  $C$  ed è caratterizzato da

$$y \in C \text{ e } (x - y, u - y) \leq 0 \text{ per ogni } u \in C.$$

In particolare, se  $C$  è uno spazio vettoriale  $y$  è la proiezione di  $x$  su  $C$  se e solo se

$$y \in C \text{ e } (x - y, u) = 0 \text{ per ogni } u \in C.$$

**Proposizione 1.9** Se  $C$  è un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto, allora

$$\|P_C x_1 - P_C x_2\|_H \leq \|x_1 - x_2\|_H \text{ per ogni } x_1, x_2 \in H.$$

**Teorema 1.10** Sia  $M$  un sottospazio non vuoto di  $H$ . Allora

1.  $M^\perp$  è un sottospazio vettoriale chiuso,
2.  $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$ ,
3.  $H = M \oplus M^\perp$  se  $M$  è chiuso.

**Teorema 1.11 Teorema di rappresentazione di Riesz** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e sia  $F : H \rightarrow \mathbf{R}$  un funzionale lineare e continuo. Allora esiste  $u_F \in H$  tale che

$$F(x) = (u_F, x) \text{ per ogni } x \in H.$$

Inoltre l'applicazione  $F \rightarrow u_F$  è lineare e continua da  $\mathcal{L}(H, \mathbf{R})$  in  $H$  e

$$\|u_F\|_H = \|F\|_{\mathcal{L}(H, \mathbf{R})} \text{ per ogni } F.$$

**Definizione 1.12 Convergenza debole.** Si dice che una successione  $\{x_n\} \subset H$  converge debolmente a  $x \in H$  se per ogni  $F \in \mathcal{L}(X, Y)$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$$

(oppure  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u, x_n) = (u, x)$  per ogni  $u \in H$ ). Si indica allora con la notazione

$$x_n \rightharpoonup x \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

È evidente che se il limite debole esiste allora è unico, infatti se  $x$  e  $y$  sono due limiti deboli della stessa successione si ha

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (u, x_n) - (u, x_n) = (u, x - y) \text{ per ogni } u \in H.$$

Inoltre,

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x,$$

cioè se una successione  $x_n$  converge a  $x$  in  $H$  allora converge anche debolmente a  $x$  in  $H$ .

**Proposizione 1.13** Se  $H \ni x_n \rightharpoonup x$ , allora la successione  $\|x_n\|$  è limitata e

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

*Dim.* Siccome  $(x_n, u) \rightarrow (x, u)$  per ogni  $u \in H$ , per il Teorema di Banach - Steinhaus si ha

$$\sup_n \|x_n\| < +\infty.$$

Inoltre,

$$(x, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, u) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n, u) \leq \|u\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|,$$

quindi

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

□

**Teorema 1.14 Teorema di Banach Alaoglu.** In uno spazio di Hilbert separabile, le successioni limitate sono debolmente compatte. Cioè: data una successione  $x_n$  con  $\|x_n\| \leq 1$  per ogni  $n$ , esiste una sottosuccessione  $x_{h_n}$  di  $x_n$  tale che

$$x_{h_n} \rightharpoonup x \in H$$

e  $\|x\| \leq 1$ .

## 1.4 Sistemi ortonormali

**Definizione 1.15** Un insieme  $S = \{u_j\}_{j \in J}$  in uno spazio di Hilbert  $H$  è un sistema ortonormale se

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} \text{ per ogni } i, j \in J.$$

Un sistema ortonormale si dice completo

$$(x, u_j) = 0 \text{ per ogni } j \in J \text{ implica } x = 0$$

**Teorema 1.16** Ogni spazio di Hilbert separabile  $H$  ammette un sistema ortonormale completo e numerabile, cioè esiste un sistema ortonormale  $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  tale che

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n) u_n \text{ per ogni } x \in H.$$

Inoltre,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)^2,$$

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, u_n)(y, u_n).$$

I numeri  $(x, u_n)$  si chiamano i coefficienti di Fourier di  $x$  rispetto alla base ortonormale  $\{u_n\}$  e si indicano anche con  $\hat{x}(n)$ .

## 2 Sugli insiemi compatti

**Definizione 2.1** Un sottoinsieme  $S$  di uno spazio normato  $X$  si dice relativamente compatto se ogni successione in  $S$  contiene una sottosuccessione convergente in  $X$ .  $S$  si dice compatto se è relativamente compatto e chiuso.

Si può dimostrare che  $S$  è compatto se e solo se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio normato  $X$  è chiuso e limitato. Esempi:

1. In  $\mathbf{R}^N$  sono compatti tutti e soli gli insiemi limitati e chiusi (sono relativamente compatti tutti e soli gli insiemi limitati).
2. Attenzione: in generale non è vero che ogni insieme limitato e chiuso è compatto. Infatti consideriamo lo spazio vettoriale

$$l^2 = \left\{ x = \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty \right\}$$

che risulta uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Sia

$$\Sigma = \left\{ x = \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1 \right\}.$$

$\Sigma$  è limitato e chiuso, ma non è compatto, infatti la successione  $\{e_k\}$  di  $\Sigma$  definita da  $\{e_k\}_n = \delta_{kn}$  è tale che

$$\|e_{k_1} - e_{k_2}\| = \sqrt{2} \text{ per ogni } k_1, k_2$$

quindi non ha sottosuccessioni di Cauchy e quindi non ha sottosuccessioni convergenti.

3. In effetti si può dimostrare il seguente

**Teorema 2.2** *Uno spazio normato ha dimensione finita se e solo se ogni sottoinsieme limitato è relativamente compatto*

Per dimostrare questa affermazione utilizziamo il

**Lemma 2.3 Lemma di Riesz** *Sia  $X$  uno spazio normato, sia  $S \subsetneq X$  un suo sottospazio chiuso e sia  $\alpha \in (0, 1)$ . Allora, esiste un elemento  $\psi \in X$  con  $\|\psi\| = 1$  e*

$$\|\psi - \phi\| \geq \alpha \text{ per ogni } \phi \in S.$$

*Dim. del Lemma di Riesz.* Poiché  $S \subsetneq X$  ed  $S$  è chiuso, preso  $f \in X \setminus S$  si ha

$$0 < \beta = \inf_{\psi \in S} \|f - \psi\|.$$

Per definizione di estremo inferiore, esiste  $g \in S$  tale che

$$\beta \leq \|f - g\| \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Definiamo il vettore di norma 1,

$$\psi := \frac{f - g}{\|f - g\|}.$$

Per  $\phi \in S$ , si ha

$$\|\psi - \phi\| = \frac{1}{\|f - g\|} \|f - \{g + \|f - g\|\phi\}\| \geq \frac{\beta}{\|f - g\|} \geq \alpha.$$

□

*Dim. del Teorema 2.2.* Negli spazi a dimensione finita i compatti sono tutti e soli gli insiemi limitati e chiusi. Si può dimostrare come in  $\mathbf{R}^N$ . In uno spazio a dimensione qualunque è comunque vero che ogni compatto è limitato e chiuso. Rimane da far vedere che se  $X$  ha dimensione infinita, esiste almeno un insieme limitato e chiuso che non è compatto. In particolare facciamo vedere che la sfera di raggio 1 non è compatta costruendo una successione con elementi tutti di norma 1 che non ammette sottosuccessioni convergenti.

Sia  $\psi_1 \in X$  con  $\|\psi_1\| = 1$ . Chiamiamo  $S_1 := \text{span}\{\psi_1\}$ .  $S_1$  è un sottospazio chiuso di  $X$  strettamente contenuto in  $X$  (visto che  $X$  non ha dimensione finita). Per il Lemma di Riesz, esiste  $\psi_2 \in X$  tale che  $\|\psi_2\| = 1$  e  $\|\psi_2 - \psi_1\| \geq 1/2$ . Sia  $S_2 := \text{span}\{\psi_1, \psi_2\} \subsetneq X$ . Esiste quindi  $\psi_3 \in X$  tale che  $\|\psi_3\| = 1$ ,  $\|\psi_3 - \psi_1\| \geq 1/2$  e  $\|\psi_3 - \psi_2\| \geq 1/2$ . Poiché  $X$  ha dimensione infinita, questo procedimento non ha termine e si costruisce quindi una successione  $\{\psi_n\} \subset X$  tale che  $\|\psi_n\| = 1$  e  $\|\psi_m - \psi_n\| \geq 1/2$  per ogni  $n, m$  con  $n \neq m$ . Abbiamo costruito una successione limitata che non ha sottosuccessioni di Cauchy, quindi non ha sottosuccessioni convergenti. Quindi la sfera unitaria non è compatta.  $\square$

4. Il *Teorema di Ascoli-Arzelà* caratterizza i sottoinsiemi relativamente compatti di  $C[a, b]$ . Afferma infatti che un sottoinsieme  $S$  di  $C[a, b]$  è relativamente compatto se e solo se è limitato ed *equicontinuo*, cioè se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $f \in S$  e per ogni coppia  $s, t \in (0, 1)$  con  $|s - t| < \delta$  si ha  $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ .
5. Vediamo un caso speciale del *Teorema di Immersione di Sobolev*

**Proposizione 2.4** *Gli insiemi della forma*

$$S = \{f \in H^1[0, 1] : \|f\|_{H^1} \leq E\}$$

*sono compatti in  $C[0, 1]$ .*

*Dim.* In primo luogo osserviamo che le funzioni di  $H^1[0, 1]$  sono in particolare funzioni assolutamente continue (e quindi  $S \subset C[0, 1]$ ) e si può scrivere

$$f(x) = f(t) + \int_t^x f'(s) ds.$$

Integrando in  $t$  questa relazione si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 \int_t^x f'(s) ds dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x \int_0^s f'(s) dt ds \\ &= \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x s f'(s) ds, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^x s |f'(s)| ds \\ &\leq \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2} \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) E, \end{aligned}$$

quindi  $\|f\|_{C^0} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) E$  ed  $S$  è limitato in  $C^0[0, 1]$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &\leq \left| \int_s^t f'(\tau) d\tau \right| \leq \|f'\|_{L^2} \left| \int_s^t 1 d\tau \right|^{1/2} \\ &= |s - t|^{1/2} \|f'\|_{L^2} \leq |s - t|^{1/2} \|f\|_{H^1} \leq E |s - t|^{1/2}, \end{aligned}$$

e le funzioni di  $S$  sono equicontinue. Questo dimostra che  $S$  è relativamente compatto. Vogliamo adesso mostrare che è anche chiuso. Sia  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una successione di funzioni di  $S$  convergente a  $\bar{f}$  in  $C(0,1)$ . Consideriamo la successione delle derivate  $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ . Per la definizione di  $S$  sappiamo che tale successione è limitata rispetto alla norma  $L^2$ . Per il teorema di Banach-Alaoglu, tale successione ammette una sottosuccessione (che chiamiamo  $\{f'_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ ) debolmente convergente ad una funzione  $g \in L^2$ . Facciamo vedere che  $g$  è la derivata debole di  $\bar{f}$ : sia  $\Phi$  una funzione test, cioè una funzione  $C^\infty$  a supporto compatto in  $(0,1)$ , allora, poiché  $f_{n_j}$  converge uniformemente a  $\bar{f}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{f}(t)\Phi'(t) dt &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{n_j}(t)\Phi'(t) dt \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} - \int_0^1 f'_{n_j}(t)\Phi(t) dt = - \int_0^1 g(t)\Phi(t) dt, \end{aligned}$$

quindi  $\bar{f} \in H^1(0,1)$  e

$$\begin{aligned} \|\bar{f}\|_{H^1}^2 &= \|\bar{f}\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} (\|f_{n_j}\|_{L^2}^2 + \|f'_{n_j}\|_{L^2}^2) \leq E^2. \end{aligned}$$

### 3 Operatori compatti

Siano  $X$  e  $Y$  spazi normati e sia  $K : X \rightarrow Y$  un operatore lineare.  $K$  si dice *compatto* se per ogni insieme limitato  $B$  in  $X$ , l'immagine  $T(B)$  è relativamente compatta in  $Y$  (cioè la sua chiusura è compatta in  $Y$ ).

Vediamo alcune proprietà degli operatori compatti

1. *Gli operatori compatti sono limitati cioè continui.*

L'insieme  $\partial B_1 = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ . È limitato in  $X$ , quindi la sua immagine  $K(\partial B_1)$  è compatta (e quindi limitata) in  $Y$ , cioè, esiste  $M > 0$  tale che

$$\|Kx\| \leq M \quad \forall x \in \partial B_1 \quad \Rightarrow \|K\| \leq M.$$

2.  *$K$  è compatto  $\Leftrightarrow K(B_1)$  è relativamente compatto.*

Basta provare  $\Leftarrow$ . Sia  $M$  un insieme limitato,  $M \subset B_R$ . Siccome  $K$  è lineare, si ha  $K(B_R) = RK(B_1)$  e quindi  $\overline{K(B_R)} = \overline{RK(B_1)}$  è compatto, perciò  $\overline{K(M)} \subset \overline{K(B_R)}$  è compatto perché è un sottoinsieme chiuso di un compatto.

3. *Un operatore  $K : X \rightarrow Y$  è compatto se e solo se per ogni successione  $\{\phi_n\}$  limitata in  $X$ , la successione  $\{K\phi_n\}$  ha una sottosuccessione convergente in  $Y$ .*

Se  $K$  è compatto la successione  $\{K\phi_n\}$  è contenuta nell'immagine di un limitato, quindi in un relativamente compatto, quindi ammette una sottosuccessione convergente.

Supponiamo invece che dall'immagine di ogni successione limitata si possa estrarre una sottosuccessione convergente. Per mostrare che  $K$  è compatto



basta far vedere che  $K(B_1)$  è relativamente compatto. Sia  $\{\psi_n\} \subset K(B_1)$ . Esiste una successione  $\{\phi_n\} \subset B_1$  tale che  $\psi_n = K\phi_n$ . Ma  $\|\phi_n\| \leq 1$ , quindi si può estrarre da  $\{\psi_n\}$  una sottosuccessione convergente, cioè  $K(B_1)$  è relativamente compatto.

4. *Combinazioni lineari di operatori compatti sono ancora operatori compatti.*

Siano  $K_1$  e  $K_2$  operatori compatti. Data una successione  $\{\phi_n\}$  limitata in  $X$ , si può estrarre una sottosuccessione  $\{\phi_{n_{1k}}\}$  tale che  $K_1\phi_{n_{1k}}$  converge in  $Y$  e da questa un'altra sottosuccessione  $\{\phi_{n_{2k}}\}$  tale che  $K_2\phi_{n_{2k}}$  converge in  $Y$ . Allora, per ogni coppia di costanti  $\alpha$  e  $\beta$ , la successione  $\alpha K_1\phi_{n_{2k}} + \beta K_2\phi_{n_{2k}}$  è convergente.

5. *Siano  $T_1 : X \rightarrow Y$  e  $T_2 : Y \rightarrow Z$  operatori lineari limitati. Se uno dei due operatori è compatto, allora la composizione*

$$T_2T_1 : X \rightarrow Z$$

*è un operatore compatto.*

Sia  $B$  un insieme limitato in  $X$ . Se  $T_2$  è compatto, dal momento che  $T_1(B)$  è ancora limitato, allora  $T_2(T_1(B))$  è relativamente compatto in  $Z$ . Supponiamo invece che  $T_1$  sia compatto e prendiamo una successione  $\{\phi_n\}$  limitata in  $X$ . Per la compattezza di  $T_1$  la successione  $\{T_1\phi_n\}$  ha una sottosuccessione  $\{T_1\phi_{n_k}\}$  convergente. Per la limitatezza di  $T_2$  si ha allora che anche  $\{T_2(T_1(\phi_{n_k}))\}$  è convergente.

6. *Sia  $X$  uno spazio normato e sia  $Y$  uno spazio di Banach. Se  $K_n : X \rightarrow Y$  è una successione di operatori compatti convergente in norma all'operatore  $K : X \rightarrow Y$ , allora  $K$  è compatto.*

Sia  $\{\phi_n\}$  una successione limitata in  $X$ ,  $\|\phi_n\| \leq E$  per ogni  $n$ . Poiché tutti gli operatori sono compatti, con un processo di diagonalizzazione si può scegliere una sottosuccessione  $\{\phi_{n_j}\}$  tale che per ogni  $m$  fissato la successione  $K_m\phi_{n_j}$  converge quando  $j$  tende a  $+\infty$ . Vogliamo mostrare che anche  $K\phi_{n_j}$  converge. Siccome  $Y$  è uno spazio di Banach, basta mostrare che la successione è di Cauchy. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Dall'ipotesi che  $\|K_m - K\|$  tende a zero per  $m$  che tende all'infinito, sappiamo che esiste  $m_0 \in \mathbf{N}$  tale che

$$\|K_{m_0} - K\| \leq \frac{\varepsilon}{3E}.$$

Poiché  $K_{m_0}\phi_{n_j}$  converge quando  $j$  tende all'infinito, esiste un indice  $N(\varepsilon)$  tale che se  $j, k > N(\varepsilon)$ , allora

$$\|K_{m_0}\phi_{n_j} - K_{m_0}\phi_{n_k}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Calcoliamo allora, per  $j, k > N(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \|K\phi_{n_j} - K\phi_{n_k}\| &\leq \|K\phi_{n_j} - K_{m_0}\phi_{n_j}\| + \|K_{m_0}\phi_{n_j} - K_{m_0}\phi_{n_k}\| \\ &\quad + \|K_{m_0}\phi_{n_k} - K\phi_{n_k}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3E}E + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3E}E = \varepsilon. \end{aligned}$$

7. Sia  $T : X \rightarrow Y$  un operatore lineare limitato con range  $R(T)$  a dimensione finita. Allora  $T$  è compatto.

Sia  $B \subset X$  limitato.  $T(B)$  è un insieme limitato contenuto in uno spazio di dimensione finita. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass,  $T(B)$  è relativamente compatto.

8. L'operatore identità  $I : X \rightarrow X$  è compatto se e solo se  $X$  ha dimensione finita.

*Dim.* Se  $X$  ha dimensione finita l'operatore identità è compatto perché l'immagine di un insieme limitato è limitato e quindi relativamente compatto.

Se invece  $X$  non ha dimensione finita, l'immagine della sfera unitaria, che è limitata, non è un insieme relativamente compatto e quindi l'operatore identità non è compatto.

**Conseguenza importante:** Se  $X$  ha dimensione infinita e  $K : X \rightarrow Y$  è un operatore compatto iniettivo, allora l'inverso di  $K$  non è limitato.

*Dim.* Se  $K^{-1} : K(X) \rightarrow X$  fosse limitato, allora risulterebbe compatto l'operatore

$$I : K^{-1}K : X \rightarrow X$$

e  $X$  dovrebbe aver dimensione finita, contrariamente all'ipotesi.  $\square$

### 3.1 Esempi di operatori compatti

**Esempio 3.1** L'operatore di immersione

$$I : H^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad If = f$$

è compatto. (Vedere la Proposizione 2.4)

**Esempio 3.2** Se  $k(\cdot, \cdot) \in C([0, 1] \times [0, 1])$ , allora l'operatore integrale

$$K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad Kf(s) = \int_0^1 k(s, t)f(t) dt$$

è compatto (si dimostra utilizzando il teorema di Ascoli- Arzelà.)

Il precedente esempio si può estendere ad una classe di nuclei più grande di quella formata da funzioni continue nel quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Diciamo che il nucleo  $k$  è *debolmente singolare* in  $[0, 1] \times [0, 1]$  se esiste una costante positiva  $M$  ed un numero  $\alpha \in [0, 1)$ , tali che

$$|k(s, t)| \leq M|s - t|^{\alpha-1}, \quad \text{per } s, t \in [0, 1], \quad s \neq t.$$

**Proposizione 3.1** Un operatore integrale con nucleo debolmente singolare è compatto da  $C[0, 1]$  in sé.

*Dim.* Osserviamo in primo luogo che l'operatore è ben definito perché per ogni  $f \in C[0, 1]$ , vale

$$|k(s, t)f(t)| \leq M\|f\|_{\infty}|s - t|^{\alpha-1},$$

che è integrabile in  $(0, 1)$  per  $\alpha \in (0, 1)$ .

Definiamo la funzione continua e lineare a tratti  $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2x - 1 & \text{per } 1/2 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{per } 1 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

e definiamo i nuclei continui

$$k_n(s, t) := \begin{cases} h(n|s - t|)k(s, t) & \text{per } s \neq t, \\ 0 & \text{per } s = t. \end{cases}$$

I corrispondenti operatori integrali  $K_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  sono compatti (esempio 3.2).

Calcoliamo

$$\begin{aligned} |Kf(s) - K_n f(s)| &= \left| \int_0^1 (k(s, t) - k_n(s, t))f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{|s-t| \leq \frac{1}{n}} |k(s, t)(1 - h(n|s - t|))| \cdot |f(t)| dt \\ &\leq \int_{|s-t| \leq \frac{1}{n}} |k(s, t)||f(t)| dt \leq M\|f\|_{C^0} \int_{|s-t| \leq \frac{1}{n}} |s - t|^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{2M\|f\|_{C^0}}{\alpha n^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Cioè  $K_n f$  converge a  $Kf$  uniformemente in  $[0, 1]$ , e quindi  $Kf \in C[0, 1]$ . Inoltre

$$\|K - K_n\|_{C^0} \leq \frac{2M}{\alpha n^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

e quindi  $K$  è compatto. □

### 3.2 Teoria spettrale degli operatori compatti negli spazi di Hilbert

**Proposizione 3.2** *Siano  $H_1$  e  $H_2$  due spazi di Hilbert e sia  $T : H_1 \rightarrow H_2$  un operatore lineare continuo. Esiste allora un unico operatore lineare  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  tale che*

$$(u, Tv)_{H_2} = (T^*u, v)_{H_1} \quad \text{per ogni } u \in H_2, v \in H_1.$$

Inoltre

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$$

L'operatore  $T^*$  si chiama operatore aggiunto di  $T$ .

*Dim.* Dato  $u \in H_2$  definiamo  $f_u : H_1 \rightarrow \mathbf{R}$  come

$$f_u(v) = (u, Tv)_{H_2} \quad \text{per } v \in H_1.$$

L'operatore  $f_u$  è ovviamente lineare ed è anche limitato, infatti

$$|f_u(v)| = |(u, Tv)_{H_2}| \leq \|u\|_{H_2} \|v\|_{H_1} \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}.$$

Per il Teorema di rappresentazione di Riesz esiste quindi un unico  $T^*u \in H_1$  tale che

$$(u, Tv) = f_u(v) = (T^*u, v) \text{ per ogni } v \in H_1.$$

Risulta in questo modo definito un operatore lineare  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  che risulta continuo, dato che

$$|(T^*u, v)_{H_1}| = |f_u(v)| \leq \|u\|_{H_2} \|v\|_{H_1} \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$$

e, quindi,

$$\|T^*u\|_{H_1} \leq \|u\|_{H_2} \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)},$$

cioè  $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2, H_1)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$ . Siccome però si vede dalla definizione che  $(T^*)^* = T$ , si ha la tesi.  $\square$

Vale anche la relazione

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

**Definizione 3.3** Un operatore lineare  $T : H \rightarrow H$  si dice *autoaggiunto* se

$$T = T^*,$$

cioè se

$$\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle \text{ per ogni } x, y \in H.$$

**Proposizione 3.4** Se  $K : H_1 \rightarrow H_2$  è un operatore compatto tra spazi di Hilbert, allora anche  $K^* : H_2 \rightarrow H_1$  è compatto.

*Dim.* Sia  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset H_2$  una successione limitata tale che  $\|\phi_n\| \leq c$  per ogni  $n \in \mathbf{N}$ . Per la limitatezza di  $K^*$ , la successione  $\{K^*\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset H_1$  è ancora limitata. Poiché  $K$  è compatto, esiste una sottosuccessione  $\{\phi_{n_j}\}_{j \in \mathbf{N}}$  tale che  $\{KK^*\phi_{n_j}\}_{j \in \mathbf{N}}$  converge in  $H_2$ . Fissato comunque  $\varepsilon > 0$ , esiste un indice  $M > 0$  tale che

$$\|KK^*\phi_{n_j} - KK^*\phi_{n_l}\| \leq \frac{\varepsilon}{2c} \text{ per } j, l > M.$$

Allora, prendendo  $j, l > M$  si ha,

$$\begin{aligned} \|K^*\phi_{n_j} - K^*\phi_{n_l}\|^2 &= \langle K^*\phi_{n_j} - K^*\phi_{n_l}, K^*(\phi_{n_j} - \phi_{n_l}) \rangle \\ &= \langle KK^*\phi_{n_j} - KK^*\phi_{n_l}, \phi_{n_j} - \phi_{n_l} \rangle \\ &\leq \|KK^*\phi_{n_j} - KK^*\phi_{n_l}\| \|\phi_{n_j} - \phi_{n_l}\| \leq \frac{\varepsilon}{2c} 2c = \varepsilon, \end{aligned}$$

cioè  $K^*\phi_{n_j}$  è convergente in  $H_1$  e quindi  $K^*$  è compatto.  $\square$

**Esempio 3.3** Se  $H_1 = \mathbf{R}^n$  e  $H_2 = \mathbf{R}^m$  e  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  è rappresentato dalla matrice  $A = \{a_{ij}\}$  per  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  nel senso che  $T(x) = Ax$ , allora  $T^* : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  è dato da

$$T^*(y) = A^T y.$$

**Esempio 3.4 Aggiunto di un operatore integrale.** Sia  $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$  e sia  $K : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  definito da

$$(Kf)(s) = \int_0^1 k(s, t)f(t) dt.$$

Calcoliamo l'aggiunto di  $K$  utilizzando il Teorema di Fubini.

$$\begin{aligned} \langle Kf, g \rangle &= \int_0^1 \left( \int_0^1 k(s, t)f(t) dt \right) g(s) ds \\ &= \int_0^1 \int_0^1 k(s, t)f(t)g(s) dt ds \\ &= \int_0^1 f(t) \left( \int_0^1 k(s, t)g(s) ds \right) dt = \langle f, K^*g \rangle, \end{aligned}$$

dove

$$K^*g(s) = \int_0^1 k(t, s)g(t) dt.$$

$K^*$  è ancora un operatore integrale e corrisponde al nucleo  $k^*(s, t) = k(t, s)$ . L'operatore  $K$  è autoaggiunto se  $k(t, s) = k(s, t)$  per ogni  $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

Un risultato fondamentale riguardante gli operatori compatti è il seguente teorema

**Teorema 3.5 Alternativa di Fredholm.** *Sia  $X$  uno spazio di Hilbert, sia  $K : X \rightarrow X$  un operatore compatto e sia  $K^*$  il suo aggiunto. Allora*

- a)  $N(I - K)$  ha dimensione finita,
- b)  $R(I - K)$  è chiuso e

$$R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$$

- c)  $N(I - K) = \{0\}$  se e solo se  $R(I - K) = X$
- d)  $\dim(N(I - K)) = \dim(N(I - K^*))$ .

Osserviamo che la proprietà c) fa somigliare gli operatori compatti a operatori tra spazi a dimensione finita.

Limitiamoci al caso di operatori definiti su spazi di Hilbert.

**Definizione 3.6** *Sia  $X$  uno spazio di Hilbert e sia  $T : X \rightarrow X$  un operatore lineare.*

*Si chiama risolvente di  $T$  l'insieme*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbf{R} : T - \lambda I \text{ ha inverso limitato su } X\}.$$

*Si chiama invece spettro di  $T$  il complementare del risolvente*

$$\sigma(T) = \mathbf{R} \setminus \rho(T).$$

*Un elemento  $\lambda \in \sigma(t)$  è un autovalore se  $T - \lambda I$  non è iniettivo. Se  $\lambda$  è un autovalore, gli elementi non nulli del nucleo  $N(T - \lambda I)$  si dicono autovettori.*

Vale il seguente risultato:

**Teorema 3.7** Sia  $T : X \rightarrow X$  un operatore lineare su uno spazio di Hilbert  $X$ .

a) Se  $x_1, \dots, x_n$  sono un insieme finito di autovettori, ognuno corrispondente ad un diverso autovalore, allora essi sono linearmente indipendenti.

Se  $T$  è autoaggiunto tali autovettori sono a due a due ortogonali.

b) Se  $T$  è autoaggiunto,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle = r(T) = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

In generale, per operatori non compatti, è possibile che  $T - \lambda I$  sia iniettivo ma non suriettivo. Questo, grazie all'Alternativa di Fredholm, non succede per operatori compatti autoaggiunti (cioè tali che  $\langle Kx, x \rangle = \langle x, Kx \rangle$  per ogni  $x \in X$ ) per i quali abbiamo una descrizione completa dello spettro.

**Teorema 3.8 Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.** Sia  $X$  uno spazio di Hilbert e sia  $K : X \rightarrow X$  un operatore compatto autoaggiunto. Allora:

a)  $\sigma(K) \setminus \{0\}$  è composto da soli autovalori.  $K$  ha almeno un autovalore e ne ha al più una infinità numerabile con 0 come unico possibile punto di accumulazione.

b) Per ogni autovalore  $\lambda \neq 0$  esiste un numero finito di autovettori linearmente indipendenti. Autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali.

c) Ordiniamo gli autovalori in modo che sia  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$ . Se indichiamo con  $P_j$  la proiezione su  $N(K - \lambda_j)$ , si ha

$$K = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j.$$

d) Esiste una successione  $\{x_j\}_{j \in J}$  (con  $J$  finito o  $J = \mathbf{N}$ ) tale che  $x_j$  è un autovettore per  $K$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle = 0$  se  $i \neq j$  e tale che per ogni  $x \in X$  esiste  $x_0 \in N(K)$  tale che

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j$$

e

$$Kx = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle x, x_j \rangle x_j.$$

Se  $K$  è iniettivo,  $\{x_j : j \in J\}$  è un sistema completo in  $X$ .

Per la dimostrazione rimandiamo al libro di H. Brezis, Analisi Funzionale. Osserviamo soltanto che, per definire il sistema completo, definiamo una successione con valore assoluto non crescente costituita dagli autovalori di  $K$ , ognuno contato con la sua molteplicità. Per ogni autovalore scegliamo una base ortogonale dell'autospazio (che ha dimensione finita uguale alla molteplicità dell'autovalore).

**Osservazione 3.9** Se  $K$  non è iniettivo e  $X$  è separabile, si può completare  $\{x_j\}_{j \in J}$  con un sistema ortonormale completo per  $N(K)$  ottenendo un sistema ortonormale completo per  $X$  formato ancora da autovettori.

In generale non si può concludere che  $N(K)$  ha dimensione finita.

Vogliamo adesso introdurre la decomposizioni a valori singolari, che è l'analogo del Teorema spettrale per operatori compatti non autoaggiunti.

**Proposizione 3.10** Sia  $T : H_1 \rightarrow H_2$  un operatore lineare limitato tra due spazi di Hilbert. Valgono allora le seguenti identità:

$$\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp \quad e \quad \overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$$

e, inoltre,

$$H_2 = \overline{R(T)} \oplus N(T^*) \quad e \quad H_1 = \overline{R(T^*)} \oplus N(T).$$

### 3.3 Decomposizioni a valori singolari

**Teorema 3.11** Sia  $K : H_1 \rightarrow H_2$  un operatore compatto tra spazi di Hilbert. Esistono un insieme di indici  $J$  (finito o  $J = \mathbf{N}$ ), una successione di numeri reali positivi  $\{\sigma_j\}_{j \in J}$  e due sistemi ortonormali  $\{e_j\}_{j \in J}$  in  $H_1$  e  $\{f_j\}_{j \in J}$  in  $H_2$ , tali che

1. La successione  $\{\sigma_j\}_{j \in J}$  è monotona non crescente e, se  $J = \mathbf{N}$ ,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sigma_j = 0.$$

2.  $Ke_j = \sigma_j f_j$  e  $K^* f_j = \sigma_j e_j$  per  $j \in J$ .

3. Per ogni  $x \in H_1$  esiste  $x_0 \in N(K)$  tale che

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$$

e

$$Kx = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j. \quad (2)$$

4. Per ogni  $y \in H_2$ ,

$$K^* y = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle y, f_j \rangle e_j.$$

**Definizione 3.12** Sistema singolare I numeri  $\sigma_j$  vengono detti valori singolari di  $K$  e la famiglia  $\{\sigma_j, e_j, f_j\}_{j \in J}$  è detta sistema singolare per  $K$ , mentre la formula (2) è detta decomposizione a valori singolari di  $K$  (SVD=Singular Value Decomposition).

**Osservazione 3.13** La soluzione di  $Kx = y$  con  $y \in R(K)$  si scrive

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \sigma_j^{-1} \langle y, f_j \rangle e_j,$$

con  $x_0 \in N(K)$ .

*Dim.* Consideriamo gli operatori

$$K^*K : H_1 \rightarrow H_2 \quad \text{e} \quad KK^* : H_2 \rightarrow H_1$$

che sono entrambi compatti e autoaggiunti.

Mostriamo che se  $\lambda \neq 0$  è un autovalore per  $K^*K$ , allora è positivo ed è anche un autovalore per  $KK^*$  con la stessa molteplicità. Sia  $\lambda \neq 0$  e sia  $u$  tale che

$$K^*Ku = \lambda u.$$

Calcoliamo

$$\lambda \|u\|^2 = \langle \lambda u, u \rangle = \langle K^*Ku, u \rangle = \langle Ku, Ku \rangle = \|Ku\|^2.$$

Poiché  $u \neq 0$ , allora  $\lambda > 0$ . Inoltre

$$K^*Ku = \lambda u \Rightarrow KK^*(Ku) = \lambda Ku,$$

cioè  $Ku \in N(KK^* - \lambda I)$  da cui segue che  $\lambda$  è un autovalore per  $KK^*$ . Inoltre

$$K(N(K^*K - \lambda I)) \subset N(KK^* - \lambda I)$$

da cui segue che

$$\dim(N(K^*K - \lambda I)) \leq \dim(N(KK^* - \lambda I)).$$

Scambiando i ruoli di  $K$  e  $K^*$  si ottiene la relazione opposta da cui si ha che

$$\dim(N(K^*K - \lambda I)) = \dim(N(KK^* - \lambda I)).$$

Per il teorema 3.8, possiamo definire una successione  $\{\lambda_j\}_{j \in J}$  non crescente di autovalori di  $K^*K$  contati ognuno con la propria molteplicità,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots > 0$$

dove  $J = N$  oppure  $J$  è un insieme finito. A questa successione corrisponde una successione  $\{e_j\}_{j \in J}$  di autovettori di  $K^*K$  che forma un sistema ortonormale completo per  $N(K^*K)^\perp$ . Osserviamo che  $N(K^*K) = N(K)$ . Infatti, se  $x \in N(K^*K)$ ,  $K^*Kx = 0$  e quindi

$$0 = \langle K^*Kx, x \rangle = \langle Kx, Kx \rangle = \|Kx\|^2,$$

cioè  $x \in N(K)$ . Viceversa, ogni  $x \in N(K)$  appartiene sicuramente a  $N(K^*K)$ .

La successione  $\{e_j\}_{j \in J}$  ha quindi le seguenti proprietà:

$$\langle e_j, e_i \rangle = \delta_{ij} \quad \text{per ogni } i, j,$$

$$K^*Ke_j = \lambda_j e_j$$

e per ogni  $x \in H_1$  esiste  $x_0 \in N(K^*K) = N(K)$  tale che

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j.$$



Definiamo adesso per  $j \in J$

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \quad \text{e} \quad f_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} K e_j \in H_2. \quad (3)$$

Per ogni  $j \in J$ ,  $f_j$  è un autovettore di  $KK^*$  corrispondente all'autovalore  $\lambda_j$ , infatti

$$KK^* f_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} KK^* K e_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} K(\lambda_j e_j) = \lambda_j f_j.$$

Inoltre,  $\{f_j\}_{j \in J}$  è una successione ortonormale, infatti

$$\langle f_i, f_j \rangle = \frac{\langle K e_i, K e_j \rangle}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} = \frac{\langle e_i, K^* K e_j \rangle}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_j \lambda_i}} \langle e_j, e_i \rangle = \delta_{ij}.$$

Dalla definizione (3) si ha anche che

$$K e_j = \sigma_j f_j \quad \text{e} \quad K^* f_j = \sigma_j e_j.$$

Rimane da provare la (2). Dal teorema 3.8 sappiamo che

$$K^* K x = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Chiamiamo

$$Qx := \sum_{j \in J} \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j \quad \text{e} \quad Q^N x := \sum_{\substack{j \in J \\ j \leq N}} \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j.$$

Il vettore  $Qx$  risulta ben definito perché la successione dei valori singolari è non crescente e quindi

$$\sum_{j \in J} \sigma_j^2 \langle x, e_j \rangle^2 \leq \sigma_1^2 \|x\|^2.$$

Per ogni  $N$  il vettore  $Q^N x$  appartiene a  $R(K)$ . Calcoliamo

$$\|Q^N x - Qx\| = \left\| \sum_{\substack{j \in J \\ j \geq N}} \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j \right\| \leq \left( \sum_{\substack{j \in J \\ j \geq N}} \sigma_j^2 \langle x, e_j \rangle^2 \right)^{1/2} \leq \sigma_N \|x\|,$$

da cui segue che

$$Qx = \lim_{N \rightarrow +\infty} Q^N x \in \overline{R(K)}.$$

Per la continuità dell'operatore aggiunto,

$$\begin{aligned} K^* Qx &= K^* \left( \lim_N Q^N x \right) = \lim_N K^* (Q^N x) \\ &= \lim_N K^* \left( \sum_{\substack{j \in J \\ j \leq N}} \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j \right) \\ &= \lim_N \sum_{\substack{j \in J \\ j \leq N}} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j = K^* Kx, \end{aligned}$$

Abbiamo quindi:

$$K^*(Qx - Kx) = 0, \quad \text{cioè} \quad Qx - Kx \in N(K^*),$$

ma anche

$$Qx - Kx \in \overline{R(K)} = N(K^*)^\perp$$

da cui segue che  $Qx = Kx$ , cioè la (2).

**Esempio 3.5** Sia  $K : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  definito da

$$Kx(s) := \int_0^s x(t) dt, \quad \text{per } t \in (0, 1).$$

L'aggiunto di  $K$  è

$$K^*y(s) := \int_s^1 y(t) dt.$$

L'operatore  $K$  è compatto e

$$K^*Kx(s) = \int_s^1 \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

$\lambda \neq 0$  è un autovalore di  $K^*K$  se esiste una funzione  $x$  non nulla tale che

$$\lambda x(s) = \int_s^1 \int_0^t x(\tau) d\tau \quad \text{per } s \in (0, 1) \quad (4)$$

Dalla (4) si vede che deve valere

$$x(1) = 0.$$

Derivando poi l'equazione (4) rispetto ad  $s$  si ha

$$\lambda x'(s) = - \int_0^s x(\tau) d\tau$$

dalla quale segue che  $x'(0) = 0$ . Derivando nuovamente rispetto ad  $s$  si ottiene infine l'equazione differenziale  $\lambda x''(s) = -x(s)$ . In conclusione,  $\lambda \neq 0$  è un autovalore per  $K^*K$  se esiste una soluzione non nulla di

$$\begin{cases} \lambda x''(s) + x(s) = 0 & \text{in } (0, 1), \\ x(1) = 0, & x'(0) = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione non nulla se e solo se  $\lambda = \frac{4}{(2j-1)^2\pi^2}$  per  $j = 1, 2, \dots$ . I valori singolari di  $K$  sono quindi

$$\sigma_j = \frac{2}{(2j-1)\pi} \quad \text{per } j \in \mathbf{N}.$$

Ogni valore singolare ha molteplicità 1 e le corrispondenti autofunzioni sono

$$e_j(s) = \sqrt{2} \cos \frac{(2j-1)\pi s}{2},$$

mentre

$$f_j = \frac{1}{\sigma_j} K e_j = \sqrt{2} \sin \frac{(2j-1)\pi s}{2}.$$

### 3.4 Criterio di esistenza di Picard

Il teorema seguente è un criterio per la risolubilità di equazioni lineari governate da un operatore compatto.

**Teorema di Picard.** Sia  $K : H_1 \rightarrow H_2$  un operatore lineare compatto con sistema singolare  $\{\sigma_j, e_j, f_j\}$ . Dato  $y \in H_2$  le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (a)  $y \in R(K)$  (cioè  $Kx = y$  ha soluzione)  
 (b)  $y \in \overline{R(K)}$  e  $\sum_{j \in J} \frac{1}{\sigma_j^2} |\langle y, f_j \rangle|^2 < +\infty$ .

*Dim.* (a)  $\Rightarrow$  (b). Sia  $y \in R(K) \subset \overline{R(K)}$ . Esiste  $x \in H_1$  tale che  $Kx = y$ . Dal teorema 3.11 si ha che

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j \quad \text{e} \quad y = Kx = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j,$$

da cui segue che

$$\langle y, f_j \rangle = \sigma_j \langle x, e_j \rangle$$

e, quindi,

$$\sum_{j \in J} \sigma_j^{-2} \langle y, f_j \rangle^2 = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle^2 \leq \|x\|^2 < +\infty.$$

(b)  $\Rightarrow$  (a) È sufficiente considerare il caso  $J = \mathbf{N}$ , infatti se  $J$  è un insieme finito,  $R(K)$  è chiuso. Definiamo la successione

$$x^n := \sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1} \langle y, f_j \rangle e_j, \quad \text{per } n \in \mathbf{N}$$

e facciamo vedere che  $x^n$  converge, mostrando che è una successione di Cauchy. Sia  $m \geq n$ , allora

$$\|x^n - x^m\|^2 = \sum_{j=n+1}^m \sigma_j^{-2} \langle y, f_j \rangle^2 \rightarrow 0 \quad \text{per } n, m \rightarrow +\infty,$$

perchè la serie  $\sum_{j \in J} \frac{1}{\sigma_j^2} |\langle y, f_j \rangle|^2$  converge. Chiamiamo  $x := \lim_n x^n$ . Osserviamo che

$$Kx = \lim_n Kx^n = \lim_n \sum_{j=1}^n \langle y, f_j \rangle f_j = \sum_{j \in J} \langle y, f_j \rangle f_j,$$

quindi

$$\|Kx\| \leq \|y\|.$$

Sia, adesso,  $z := y - \sum_{j \in J} \langle y, f_j \rangle f_j$ . Per ipotesi,  $z \in \overline{R(K)} = N(K^*)^\perp$ . D'altra parte,

$$\langle z, f_j \rangle = 0 \quad \text{per ogni } j \in J$$

e, quindi,

$$K^*z = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle z, f_j \rangle e_j = 0$$

da cui segue che  $z \in N(K^*)$  e quindi  $z = 0$ , cioè  $y = \sum_{j \in J} \langle y, f_j \rangle f_j = K(x) \in R(K)$ .

**Osservazione 3.14** La decomposizione ai valori singolari mostra chiaramente la cattiva posizione di una equazione lineare governata da un operatore compatto. Infatti, se perturbiamo il dato  $y$  nell'equazione  $Kx = y$  aggiungendo il vettore  $\delta_y = \alpha f_j$ , si ottiene una perturbazione della soluzione della forma  $\delta_x = \alpha \sigma_j^{-1} e_j$ . Se  $J = \mathbf{N}$ , il rapporto  $\|\delta_x\|/\|\delta_y\|$  può essere reso arbitrariamente grande, infatti

$$\|\delta_x\|/\|\delta_y\| = \sigma_j^{-1} \rightarrow +\infty.$$