Equazione del calore all'indietro

Elisa Francini e Sergio Vessella

1 Termografia

Consideriamo una sbarra di materiale conduttore di lunghezza π. Supponiamo che la superficie laterale della sbarra sia isolata e che il calore fluisca solo nella direzione dell'asse. Possiamo allora schematizzare la sbarra con il segmento $(0, \pi)$ dell'asse reale. Indichiamo con $u(x, t)$ la temperatura nel punto x della sbarra al tempo t. La funzione u soddisfa l'equazione differenziale

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi. \tag{1}$$

Supponiamo che gli estremi della sbarra siano tenuti a temperatura 0 e che la temperatura iniziale sia una funzione $f(x)$ per $0 \leq x \leq \pi$, vale a dire, supponiamo che u soddisfi le seguenti condizioni al contorno:

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \tag{2}$$

e iniziale

$$u(x, 0) = f(x). \tag{3}$$

Il problema diretto standard in matematica applicata, consiste nel trovare la temperatura della sbarra ad un tempo successivo (diciamo per $t = 1$), cioè nel calcolare $g(x) = u(x, 1)$. Vediamo come si risolve il problema diretto: cerchiamo una soluzione del problema con il metodo della separazione delle variabili, vale a dire, consideriamo inizialmente soluzioni della forma

$$u(x, t) = a(x) \cdot b(t),$$

che soddisfino(2).

L'equazione differenziale (1) risulta soddisfatta se

$$a(x) \cdot b'(t) = a''(x) \cdot b(t),$$

che, supponendo a e b non identicamente nulli, possiamo scrivere

$$\frac{a''(x)}{a(x)} = \frac{b'(t)}{b(t)}.$$

poiché i due membri della precedente uguaglianza dipendono da due variabili indipendenti, allora devono essere entrambi costanti, cioè deve valere

$$\frac{a''(x)}{a(x)} = \frac{b'(t)}{b(t)} = \lambda.$$

La condizione al bordo (2) richiede che valga $a(0) = a(\pi) = 0$, vale a dire che la funzione a risolva il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} a''(x) = \lambda\, a(x) \quad \text{per} \quad 0 < x < \pi, \\ \quad a(0) = 0, \quad a(\pi) = 0. \end{cases}$$

Questo problema ai limiti ha soluzione non nulla se e solo se $\lambda = -k^2$, con k numero intero, e la soluzione è data da $a_k(x) = A_k \sin(kx)$. La corrispondente funzione $b(t)$ è data da $b_k(t) = e^{-k^2 t}$.

Con questa procedura abbiamo costruito una infinità numerabile di funzioni $u_k(x,t) = A_k \sin(kx) e^{-k^2 t}$ che risolvono l'equazione differenziale (1) e le condizioni al bordo (2).

Se consideriamo una sovrapposizione di tali soluzioni otteniamo funzioni della forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) e^{-k^2 t},$$

che soddisfano (1) e (2). Tra queste soluzioni cerchiamo quella che soddisfa la condizione iniziale (3), cioè, cerchiamo una successione numerica $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ tale che

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx). \tag{4}$$

In sostanza ci chiediamo se f è sviluppabile in serie di seni. Consideriamo per semplicità il caso in cui f sia una funzione regolare (ad esempio C^1). Per compatibilità con i dati al bordo, sappiamo che $f(0) = f(\pi) = 0$. Possiamo estendere la funzione f a tutto $\mathbf{R}$ nel modo seguente: per $x \in (-\pi, 0)$ poniamo $f(x) = -f(-x)$ e poi estendiamo da $(-\pi, \pi)$ a tutto $\mathbf{R}$ con periodo 2π. L'estensione, che indichiamo ancora con f, risulta una funzione dispari su tutto $\mathbf{R}$ (infatti, per $x > 0$, $f(-x) = f(-x + 2k\pi)$ per qualche k tale che $-x + 2k\pi \in (-\pi, \pi)$. Dal momento che la funzione è dispari in $(-\pi, \pi)$, quindi $f(-x) = f(-x + 2k\pi) = f(x - 2k\pi) = f(x)$). La teoria della serie di Fourier ci garantisce che una funzione assolutamente continua e di periodo 2π ha una estensione in serie di Fourier, cioè esistono due successioni $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ tali che

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos(kx),$$

e tale serie converge uniformemente.

Osserviamo che imponendo il vincolo che f sia una funzione dispari, si ottiene immediatamente che $B_k = 0$ per ogni $k = 0, \ldots, \infty$ (usando anche il fatto che seni a coseni formano una base di funzioni in $(0, 2\pi)$), cioè che f si può scrivere come serie di seni.

Rimane da stabilire il valore dei coefficienti A_k: moltiplichiamo la (4) per $\sin(mx)$ e integriamo su $(0, \pi)$, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^{\pi} \sin(kx) \sin(mx)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(k-m)x - \cos(k+m)x)\, dx = \frac{\pi}{2} A_m, \end{aligned}$$

da cui
$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\,dx.$$

A questo punto abbiamo risolto il problema diretto: data la funzione f, continua in $(0,\pi)$ e tale che $f(0) = f(\pi) = 0$, una soluzione del problema (1), (2) e (3) è data da

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} e^{-k^2 t} \sin(kx) \int_0^\pi f(y)\sin(ky)\,dy,$$

in particolare

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} e^{-k^2} \sin(kx) \int_0^\pi f(y)\sin(ky)\,dy.$$

Osserviamo che la serie che definisce la g converge uniformemente perché la successione degli A_k tende a zero per $k \to \infty$, quindi è limitata da una certa costante L, per cui il termine k-esimo della serie che definisce g si può maggiorare con
$$\left|\frac{2}{\pi} e^{-k^2} \sin(kx) A_k\right| \leq \frac{2}{\pi} e^{-k^2} L$$
che è il termine k-esimo di una serie numerica convergente.

Scambiando la serie con l'integrale si può ottenere la seguente espressione

$$g(x) = \int_0^\pi k(x,y) f(y)\,dy, \tag{5}$$

dove
$$k(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2} \sin(kx)\sin(ky).$$

Pensiamo adesso al problema inverso, cioè al problema di determinare la distribuzione di temperatura iniziale f, che provoca la temperatura successiva $g(x)$. Si tratta in sostanza di risolvere l'equazione del calore *all'indietro.* Matematicamente questo si esprime risolvendo rispetto ad f l'equazione (5).

È chiaro dalla natura fisica del processo che la struttura dettagliata di f viene largamente diffusa al tempo successivo $t = 1$ ed è quindi impossibile ricostruire tali informazioni dettagliate misurando g. La base matematica di tali difficoltà di ricostruzione è evidente dalla forma del nucleo della (5). Più in dettaglio, le componenti di f corrispondenti ad alte frequenze (cioè a $\sin(ny)$ per n grande), sono severamente compromesse dal fattore e^{-n^2} che, essendo molto piccolo, rende la loro influenza su g impercettibile.

Esercizio 1.1 *Supponiamo che f e g soddisfino (5). Siano $\varepsilon > 0$ e $M > 0$ numeri assegnati (ε arbitrariamente piccolo e M arbitrariamente grande) e sia $f_M(y) = M\sin(my)$. Mostrare che per ogni M ed ε esiste un m abbastanza grande perchè la perturbazione f_M (che ha norma grande) abbia su g un effetto minore di ε*

2 Stime di stabilità per l'equazione del calore all'indietro

Riprendiamo in considerazione il problema della conduzione di calore in una sbarra di lunghezza π i cui estremi sono tenuti a temperatura costante. Il problema differenziale è il seguente:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in} \quad (0,\pi)\times(0,T), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{per} \quad t \in (0,T). \end{cases}$$

Abbiamo visto che la soluzione u al tempo t si può scrivere in funzione dei valori al tempo iniziale

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\sin(nx)\int_0^{\pi} u(y,0)\sin(ny)\,dy, \quad \text{per} \ \ 0 \le x \le \pi, \ \ 0 < t \le T.$$

Abbiamo osservato che calcolare la temperatura finale $u(x,T)$ conoscendo la temperatura iniziale $u(x,0)$ è un problema ben posto, mentre il problema all'indietro, cioè calcolare $u(x,0)$ conoscendo $u(x,T)$ è un problema mal posto.

Vediamo una leggera variante di questo problema: siano $X = Y = L^2(0,\pi)$, supponiamo di avere il dato $u(x,T)$ e di voler calcolare l'incognita $u(x,\tau)$ per qualche $\tau \in (0,T)$. Si tratta quindi di invertire l'operatore $K : X \to Y$ che ha come nucleo

$$k(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(T-\tau)}\sin(nx)\sin(ny).$$

Ovviamente è ancora un problema mal posto, come si vede considerando soluzioni della forma

$$\tilde{u}(x,t) = e^{m^2(\tau-t)}\sin(mx).$$

Infatti,

$$\|\text{dato}\| = \|\tilde{u}(\cdot,T)\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-m^2(T-\tau)} \to 0 \quad \text{per} \quad m \to \infty,$$

e

$$\|\text{soluzione}\| = \|\tilde{u}(\cdot,\tau)\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Cerchiamo le giuste informazioni aggiuntive che permettono di ripristinare la stabilità.

Supponiamo di sapere che

$$u(x,0) \in L^2(0,1) \quad \text{e} \quad \|u(x,0)\|_{L^2} \le E. \tag{6}$$

Osserviamo subito che la funzione $\tilde{u}$ non soddisfa queste condizioni aggiuntive quando m diventa grande, infatti $\|\tilde{u}(x,0)\|_{L^2} = e^{m^2\tau}$.

Sia u una soluzione che soddisfa le condizioni (6). Chiamiamo

$$a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} u(y,0)\sin(ny)dy.$$

Con questa notazione

$$u(y,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin(nx)$$

e la (6) diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2 \le E^2. \tag{7}$$

Supponiamo che il dato sia piccolo cioè che

$$\|u(x,T)\|_{L^2}^2=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2T}(a_n)^2 \le \varepsilon^2 \tag{8}$$

e stimiamo

$$\|u(x,\tau)\|_{L^2}^2=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\tau}(a_n)^2.$$

Siano $q=\frac{T}{\tau}$ e p tale che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Usando la versione discreta della disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\tau}(a_n)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\tau}((a_n)^2)^{1/q}((a_n)^2)^{1/p}\\
&\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\tau q}(a_n)^2\right)^{1/q}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2\right)^{1/p}\\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2T}(a_n)^2\right)^{1/q}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2\right)^{1/p} \le \varepsilon^{2\tau/T}E^{2(1-\tau/T)},
\end{aligned}$$

cioè

$$\|u(x,\tau)\|_{L^2(0,\pi)} \le \varepsilon^{\tau/T}E^{1-\tau/T}$$

Osserviamo che la stima migliora se $\tau \to T$, mentre degenera per $\tau \to 0$.