Introduzione alle stime di stabilità

1. Alcune disuguaglianze fra f, $f^{(k)}$ e $f^{(n)}$

Proposizione 1

Sia $f \in C^2([a,b])$.

Abbiamo

$$(1)\ \|f'\|_{L^\infty(a,b)} \leq c_0 \left[(b-a)^{-2} \|f\|_{L^\infty(a,b)} + \|f''\|_{L^\infty(a,b)} \right]^{1/2} \|f\|^{1/2}_{L^\infty(a,b)}$$

con $c_0 \leq 8\sqrt{2}$, costante positiva

Dim.

La dimostrazione di (1) - §1 può essere ricondotta al caso in cui $[a,b]=[0,1]$ a tale scopo basta considerare invece di f la funzione $[0,1] \ni t \mapsto f(a+(b-a)t)$.

Sia, dunque, $f \in C^2([0,1])$.

Fissiamo $x \in [0, \frac{1}{2}]$ e sia $h \in (0, \frac{1}{2}]$.

Abbiamo

$$(2)\quad f'(x) = \left(f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e, per il teorema di Lagrange esistono ξ, η t.c. $x<\eta<\xi<x+h$ e t.c.

$$(3)\quad f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) - f'(\xi) = (x-\xi) f''(\eta).$$

Quindi

$$(4)\quad \left| f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \leq h \, \|f''\|_{L^\infty(0,1)}$$

Da quest'ultima e da (2) - s1 abbiamo, per ogni $x \in [0, \frac{1}{2}]$ e $h \in (0, \frac{1}{2}]$

$$(1) \quad |f'(x)| \leq h \|f''\|_{L^\infty(0,1)} + \frac{1}{h} \left(|f(x+h)| + |f(x)| \right) \leq$$

$$\leq h \|f''\|_{L^\infty(0,1)} + \frac{2}{h} \|f\|_{L^\infty(0,1)} .$$

Invece, se $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, basta sostituire alla (2)-s1 la

$$f'(x) = \left(f'(x) - \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \right) + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h},$$

per ogni $h \in (0, \frac{1}{2}]$

e si ha ancora

$$|f'(x)| \leq h \|f''\|_{L^\infty(0,1)} + \frac{2}{h} \|f\|_{L^\infty(0,1)} \qquad \forall h \in (0, \tfrac{1}{2}]$$

Pertanto

$$(2) \quad \|f'\|_{L^\infty(0,1)} \leq h \|f''\|_{L^\infty(0,1)} + \frac{2}{h} \|f\|_{L^\infty(0,1)} \qquad \forall h \in (0, \tfrac{1}{2}].$$

Ora poniamo

$$(3) \qquad E = \|f''\|_{L^\infty(0,1)}, \qquad \varepsilon = \|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

e minimizziamo la funzione

$$(0, \tfrac{1}{2}] \ni h \longmapsto \Phi(h) = hE + \frac{2}{h} \varepsilon$$

Abbiamo che se

a) $\left(\frac{2\varepsilon}{E}\right)^{1/2} \leq \frac{1}{2}$ allora per $h = h_0 = \left(\frac{2\varepsilon}{E}\right)^{1/2}$ si ha

$$(1) \quad \min_{(0,\frac{1}{2}]} \Phi = \Phi(h_0) = 2\sqrt{2}\,(E\varepsilon)^{1/2},$$

se

b) $\left(\frac{2\varepsilon}{E}\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2}$ allora

$$\min_{(0,\frac{1}{2}]} \Phi = \Phi\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}E + 4\varepsilon,$$

ma $8\varepsilon \geq E$, quindi

$$(2) \quad \min_{(0,\frac{1}{2}]} \Phi \leq 8\varepsilon$$

Da (1) - s3, (2) - s3 e (2) - s2 abbiamo

$$\|f'\|_{L^\infty(0,1)} \leq 2\sqrt{2}\,(E\varepsilon)^{1/2} + 8\varepsilon \leq 8\sqrt{2}\,(E+\varepsilon)^{1/2}\,\varepsilon^{1/2}$$

e ricordando la (3) - s2 abbiamo la (1) - s1. ▨

<u>Osservazioni</u>

1. Dalla proposizione precedente segue che le norme

$$\|f\|_{C^2([a,b])} := \|f\|_{L^\infty(a,b)} + (b-a)\,\|f'\|_{L^\infty(a,b)} + (b-a)^2\,\|f''\|_{L^\infty(a,b)}$$

e

$$\|f\| := \|f\|_{L^\infty(a,b)} + (b-a)^2\,\|f''\|_{L^\infty(a,b)}$$

sono equivalenti. A tale scopo basta verificare che esistono due costanti positive C_1, C_2 tali che

$$(1) \qquad C_1 \| f \| \le \| f \|_{C^2([a,b])} \le C_2 \| f \| , \qquad \forall f \in C^2([a,b]).$$

Per quanto riguarda la prima disuguaglianza di (1)-14 basta prendere $C_1 = 1$ e risulta banalmente soddisfatta. Per quanto riguarda la seconda di (1)-14, abbiamo da (1)-11

$$(2) \quad \| f' \|_{L^\infty(a,b)} \le C_0 \left\{ \left((b-a)^{-2} \| f \|_{L^\infty(a,b)} + \| f'' \|_{L^\infty(a,b)} \right) \frac{t}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2t} \| f \|_{L^\infty(a,b)} \right\} \qquad \forall t > 0$$

(abbiamo adoperato la disuguaglianza $AB \le \frac{1}{2} \left(t A^2 + \frac{1}{t} B^2 \right)$)

da cui scegliendo $t = b - a$ otteniamo la seconda disuguaglianza di (1)-14.

2. La stima (1)-11 è una <u>stima di stabilità per il calcolo della derivata prima</u> con l'informazione a priori

$$(3) \qquad (b-a)^2 \| f'' \|_{L^\infty(a,b)} \le E .$$

Infatti, se

$$(4) \qquad \| f \|_{L^\infty(a,b)} \le \varepsilon$$

allora

$$\| f' \|_{L^\infty(a,b)} \le \frac{c_0}{b-a} (E + \varepsilon)^{1/2} \varepsilon^{1/2} .$$

In altri termini, riprendendo quanto detto nel § 5 pag. 93

posto

$$K_E = \{ f \in C^2([a,b]) \;/\; (b-a)^2 \| f'' \|_{L^\infty(a,b)} \leq E \}$$

e, indicato con ω il modulo di continuità di

$$K_E \ni f \longrightarrow f' \in C^1([a,b])$$

si ha

(1) $$\omega(\varepsilon) \leq \frac{C_0}{b-a} (E+\varepsilon)^{1/2} \varepsilon^{1/2}, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Osserviamo anche che

(2) $$\frac{1}{b-a} (\varepsilon + E)^{1/2} \varepsilon^{1/2} \leq \omega(\varepsilon), \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Infatti, limitandoci per brevità al caso $[a,b] = [0,1]$ e posto

(3) $$f_\varepsilon(x) = \left(\frac{E}{\varepsilon + E} \right) \varepsilon \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon/(\varepsilon+E)}}$$

si ha

$$\| f_\varepsilon \|_{L^\infty(0,1)} \leq \varepsilon \quad , \quad \| f''_\varepsilon \|_{L^\infty(0,1)} \leq E$$

quindi $f_\varepsilon \in K_E$ e si ha

$$\omega(\varepsilon) \geq \| f'_\varepsilon \|_{L^\infty(0,1)} = (\varepsilon + E)^{1/2} \varepsilon^{1/2}$$

da cui la (2) - 15.

La (2) - 15 implica che l'esponente "$\frac{1}{2}$" nella (1) - 11 non può essere migliorato con uno più grande.

Con argomenti simili a quelli utilizzati nella dimostrazione della Proposizione 1 possiamo estendere tale proposizione alle derivate di ordine superiore. Per far questo abbiamo bisogno di alcune definizioni.

Introduciamo i seguenti operatori. Sia f una arbitraria funzione e $h \in \mathbb{R}$, poniamo

(1a) Identità $(If)(x) = f(x)$

(1b) Traslazione $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$

(1c) Differenza $(\Delta_h f)(x) = ((\tau_h - I) f)(x) = f(x+h) - f(x)$.

Siano $e_0, e_1, \dots e_j$ i seguenti polinomi

$$e_0(x) = 1$$

$$e_1(x) = x$$

$$\dots$$

$$e_j(x) = x(x-h) \cdots (x-(j-1)h).$$

Si noti che e_j ha grado j per ogni $j \in \mathbb{N}_0$.
Sia $h \neq 0$ e indichiamo con P_{n-1} il <u>polinomio di interpolazione di Newton di centro</u> x_0 e <u>grado</u> $n-1$ relativo ad f $(n \geq 2)$

$$(2) \quad P_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\Delta_h^j f)(x_0)}{j!\, h^j}\, e_j(x - x_0).$$

Sia $1 \leq j \leq n-1$ e $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ osserviamo che

$$(1) \qquad e_j(sh) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq s \leq j-1, \\ \binom{s}{j} j!\, h^j, & \text{se } j \leq s \leq n-1. \end{cases}$$

Infatti, se $0 \leq s \leq j-1$ allora uno dei fattori di e_j si annulla. Invece se $j \leq s \leq n-1$ e $1 \leq j \leq n-1$

$$e_j(sh) = (sh)(sh-h) \cdots (sh-(j-1)h) =$$

$$= h^j s(s-1) \cdots (s-(j-1)) =$$

$$= h^j j! \binom{s}{j}.$$

Osserviamo anche che se $0 \leq s \leq n-1$ si ha

$$(2) \qquad f(x_0 + sh) = (\tau_h^s f)(x_0)$$

e

$$(3) \qquad \tau_h^s = (\Delta_h + I)^s = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \Delta_h^j .$$

Quindi da (2) - s7 e (3) - s7 abbiamo

$$f(x_0 + sh) = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} (\Delta_h^j f)(x_0) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} e_j(x_0 + sh - x_0) \frac{1}{j!\, h^j} (\Delta_h^j f)(x_0) =$$

$$= P_{n-1}(x_0 + sh).$$

In definitiva

$$(1) \qquad f(x_0 + sh) = P_{n-1}(x_0 + sh), \quad s = 0, 1, \dots, n-1.$$

Possiamo, ora, enunciare e dimostrare la seguente

Proposizione 2

Siano $n \geq 2$ e $f \in C^n([a,b])$.

Per $1 \leq k \leq n-1$ abbiamo

$$(2) \quad \|f^{(k)}\|_{L^\infty(a,b)} \leq C_{k,n} \left(\|f^{(n)}\|_{L^\infty(a,b)} + \|f\|_{L^\infty(a,b)} (b-a)^{-n} \right)^{\frac{k}{n}} \|f\|_{L^\infty(a,b)}^{1-\frac{k}{n}}$$

dove $C_{k,n}$ è una costante positiva che dipende solo da k e da n.

Dim.

Come nella dimostrazione della Proposizione 1 possiamo ricondurci al caso $[a,b] = [0,1]$. In questo caso cominciamo a dimostrare la (2) - 18 quando $k = n-1$.

Sia, dunque, $f \in C^n([0,1])$. Fissiamo $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ e sia $h \in (0, \frac{1}{2(n-1)}]$

Poniamo

$$R(x) = f(x) - P_{n-1}(x), \quad x \in [0,1].$$

Dalla (1) - 18 abbiamo

$$R(x_0) = R(x_0 + h) = \dots = R(x_0 + (n-1)h) = 0$$

da cui applicando ripetutamente il teorema di Rolle abbiamo che $\exists\, \xi \in (x_0, x_0 + (n-1)h)$ t.c.

$$f^{(n-1)}(\xi) - P_{n-1}^{(n-1)}(\xi) = R^{(n-1)}(\xi) = 0$$

pertanto esiste $\xi \in (x_0, x_0 + (n-1)h)$ t. c.

(1) $$f^{(n-1)}(\xi) = P_{n-1}^{(n-1)}(\xi).$$

D'altra parte

$$P_{n-1}^{(n-1)}(x) = \frac{e_{n-1}^{(n-1)}(x - x_0)}{(n-1)!} \frac{(\Delta_h^{n-1} f)(x_0)}{h^{n-1}}$$

ma
$$e_{n-1}^{(n-1)}(x) = (n-1)!$$

Da quest'ultima e dalla (1) - 19 si ha

(2) $$f^{(n-1)}(\xi) = \frac{(\Delta_h^{n-1} f)(x_0)}{h^{n-1}}$$

Perciò

(3) $$f^{(n-1)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n-1)}(\xi)\right) + \frac{(\Delta_h^{n-1} f)(x_0)}{h^{n-1}}.$$

D'altra parte, per il teorema di Lagrange

(4) $$\left| f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n-1)}(\xi) \right| \leq \| f^{(n)} \|_{L^\infty(0,1)} |x_0 - \xi| \leq \leq \| f^{(n)} \|_{L^\infty(0,1)} (n-1) h$$

e

(1) $$\Delta_h^{n-1} f(x_0) = \left((\tau_h - I)^{n-1} f \right)(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^{n-1-j} f(x_0 + jh)$$

perciò

(2) $$|\Delta_h^{n-1} f(x_0)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} |f(x_0+jh)| \leq 2^{n-1} \|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

Da (3) - s9, (4) - s9 e (2) - s10 abbiamo

(3) $$|f^{(n-1)}(x_0)| \leq \|f^{(n)}\|_{L^\infty(0,1)} (n-1)h + \left(\frac{2}{h}\right)^{n-1} \|f\|_{L^\infty(0,1)} .$$

La (3) - s10 continua a valere anche per $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ (basta applicare la (3)-s10 a $f(1-x)$).
In definitiva abbiamo per $0 < h \leq \frac{1}{2(n-1)}$

(4) $$\|f^{(n-1)}\|_{L^\infty(0,1)} \leq E\,(n-1)h + \left(\frac{2}{h}\right)^{n-1} \varepsilon$$

dove abbiamo posto

$$E := \|f^{(n)}\|_{L^\infty(0,1)} , \qquad \varepsilon = \|f\|_{L^\infty(0,1)} .$$

Ora minimizziamo la funzione
$$\left(0, \frac{1}{2(n-1)}\right] \ni h \longmapsto \Phi(h) = E\,(n-1)h + \left(\frac{2}{h}\right)^{n-1} \varepsilon$$

abbiamo che se

a) $$\left(\frac{2^{n-1}n}{n-1}\,\frac{\varepsilon}{E}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

allora per $h = h_0 := \left(\frac{2^{n-1}n}{n-1}\,\frac{\varepsilon}{E}\right)^{1/n}$ si ha, dopo qualche semplice maggiorazione

(1) $$\Phi(h_0) \leq 4n\, E^{\frac{n-1}{n}}\, \varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

b) se $$\left(\frac{2^{n-1}n}{n-1}\,\frac{\varepsilon}{E}\right)^{1/n} \geq \frac{1}{2(n-1)}$$

si ha

$$\min_{\left(0,\frac{1}{2n-1}\right]} \Phi = \Phi\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) = \frac{E}{2} + \left(4(n-1)\right)^{n-1} \varepsilon$$

ma $E \leq 2^{2n-1} n\,(n-1)^{n-1}\varepsilon$ quindi, dopo semplici maggiorazioni

(2) $$\min_{\left(0,\frac{1}{2(n-1)}\right]} \Phi \leq (4n)^n \varepsilon$$

Da (1) - s 11 e (2) - s 11 si ha

(3) $$\| f^{(n-1)} \|_{L^\infty(0,1)} \leq \left[4n\, E^{\frac{n-1}{n}} + (4n)^n\, \varepsilon^{\frac{n-1}{n}}\right] \varepsilon^{\frac{1}{n}} \leq$$
$$\leq (4n)^n (E+\varepsilon)^{\frac{n-1}{n}}\, \varepsilon^{\frac{1}{n}}.$$

Quindi

$$(1)\quad \|f^{(n-1)}\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_n \left(\|f^{(n)}\|_{L^\infty(0,1)} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}\right)^{\frac{n-1}{n}} \|f\|_{L^\infty(0,1)}^{\frac{1}{n}}$$

con $C_n = (4n)^n$.

Ora sia $1 \leq k \leq n-1$, iterando la (1) - 121 abbiamo

$$\|f^{(k)}\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_{k+1} \left(\|f^{(k+1)}\|_{L^\infty(0,1)} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}\right)^{\frac{k}{k+1}} \|f\|_{L^\infty(0,1)}^{\frac{1}{k+1}}$$

$$\leq C_{k+1}\, C_{k+2}^{\frac{k}{k+2}} \left(\|f^{(k+2)}\|_{L^\infty(0,1)} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}\right)^{\frac{k}{k+2}} \|f\|_{L^\infty(0,1)}^{\frac{2}{k+2}} \leq$$

$$\ldots \leq C_{k,n} \left(\|f^{(n)}\|_{L^\infty(0,1)} + \|f\|_{L^\infty(0,1)}\right)^{\frac{k}{n}} \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{k}{n}}$$

dove C dipende solo da k e n.

Da quanto ottenuto sopra si ha la (2) - 18. $\blacksquare$

Stime analoghe alle precedenti possono essere facilmente ricavate anche per norme integrali quali, per $1 \leq p < +\infty$

$$(2)\quad \|f\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Vale infatti la seguente

<u>Proposizione 3</u>

Sia $f \in C^n([a,b])$ con $n \geq 2$. Per $1 \leq k \leq n-1$ abbiamo

$$(3)\quad \|f^{(k)}\|_{L^p(a,b)} \leq C_{k,n} \left(\|f^{(n)}\|_{L^p(a,b)} + (b-a)^{-n} \|f\|_{L^p(a,b)}\right)^{\frac{k}{n}} \|f\|_{L^p(a,b)}^{1-\frac{k}{n}}$$

dove $C_{k,n}$ è una costante positiva che dipende solo da k e da n.

Dim.

Consideriamo il caso $[a,b]=[0,1]$ e $k=n-1$.
Sia $t\in[0,\frac{1}{2}]$ e $h\in(0,\frac{1}{2(n-1)}]$. Dalla (3)-s9 (con t al posto di x_0) abbiamo che esiste $\xi\in(t,t+(n-1)h)$ t.c. (cfr. (3)-s9)

$$(1)\quad f^{(n-1)}(t)=\left(f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(\xi)\right)+\frac{(\Delta_h^{n-1}f)(t)}{h^{n-1}}.$$

Poniamo

$$\widetilde{f^{(n)}}(\tau)=\begin{cases} f^{(n)}(\tau) & \text{se } \tau\in[0,1], \\ 0 & \text{se } \tau\notin[0,1]. \end{cases}$$

Abbiamo

$$|f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(\xi)|=\left|\int_\xi^t f^{(n)}(\tau)\,d\tau\right|\leq$$

$$\leq\int_t^{t+(n-1)h}|f^{(n)}(\tau)|\,d\tau=\int_{\mathbb{R}}|\widetilde{f^{(n)}}(\tau)|\,\chi_{(0,(n-1)h)}(\tau-t)\,d\tau.$$

Quindi da (1)-s13, per $t\in[0,\frac{1}{2}]$ e $h\in(0,\frac{1}{2(n-1)}]$,

$$(2)\quad |f^{(n-1)}(t)|\leq\int_{\mathbb{R}}|\widetilde{f^{(n)}}(\tau)|\,\chi_{(0,(n-1)h)}(\tau-t)\,d\tau+$$

$$+\frac{|(\Delta_h^{n-1}f)(t)|}{h^{n-1}}.$$

Eleviamo a p ambo i membri di (2) - s13 e poniamo, per brevità

$$g(\tau) := |f^{(n)}(\tau)|$$

$$\chi(\tau) := \chi_{(0,(n-1)h}(\tau)$$

Abbiamo

$$(1)\left(\int_0^{1/2} |f^{(n-1)}(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left\{\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} g(\tau)\chi(\tau-t)\,d\tau\right]^p dt\right\}^{1/p} +$$

$$+\left\{\int_0^{1/2}\left|\frac{(\Delta_h^{n-1} f)(t)}{h^{n-1}}\right|^p dt\right\}^{1/p}.$$

Maggioriamo il primo integrale a secondo membro della (1) - s14 abbiamo, utilizzando la disuguaglianza di Hölder

$$(2)\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} g(\tau)\chi(\tau-t)\,d\tau\right]^p dt = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} g(\tau)\chi^{1/p}(\tau-t)\,\chi^{1-1/p}(\tau-t)\,d\tau\right]^p dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}}\left\{\left[\int_{\mathbb{R}} g^p(\tau)\,\chi(\tau-t)\,d\tau\right]\left[\int_{\mathbb{R}} \chi(\tau-t)\,d\tau\right]^{p-1}\right\}dt =$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}} \chi(\tau)\,d\tau\right]^{p-1} \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g^p(\tau)\,\chi(\tau-t)\,d\tau\right)dt =$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}} \chi(\tau)\,d\tau\right]^{p-1} \int_{\mathbb{R}}\left(g^p(\tau)\int_{\mathbb{R}} \chi(\tau-t)\,dt\right)d\tau =$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}} \chi(\tau) d\tau \right]^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left(g^p(\tau) \int_{\mathbb{R}} \chi(\eta) d\eta \right) d\tau =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \chi(\tau) d\tau \right)^p \int_{\mathbb{R}} g^p(\tau) d\tau = ((n-1)h)^p \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}^{(n)}(\tau)|^p d\tau$$

$$= ((n-1)h)^p \| f^{(n)} \|^p_{L^p(0,1)} .$$

D'altra parte utilizzando la (1) - §10 e adoperando la disuguaglianza triangolare abbiamo

(1) $$\left(\int_0^{1/2} \left| \frac{\Delta_h^{n-1} f(t)}{h^{n-1}} \right|^p dt \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{h^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\int_0^{1/2} |f(t+jh)|^p dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{2^{n-1}}{h^{n-1}} \| f \|_{L^p(0,1)}$$

Ora da quanto ottenuto in (2) - §14 e in (1) - §15, da (1) - §14 abbiamo, per $h \in (0, \frac{1}{2(n-1)}]$,

$$\left(\int_0^{1/2} |f^{(n-1)}(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq (n-1) h \| f^{(n)} \|_{L^p(0,1)} +$$

$$+ \left(\frac{2}{h} \right)^{n-1} \| f \|_{L^p(0,1)}$$

e analogamente

$$\left(\int_{1/2}^{1} |f^{(n-1)}(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \leq (n-1)h \, \| f^{(n)} \|_{L^p(0,1)} + \left(\frac{2}{h}\right)^{n-1} \| f \|_{L^p(0,1)}$$

Quindi, per $h \in \left(0, \frac{1}{2(n-1)}\right]$

$$\| f^{(n-1)} \|_{L^p(0,1)} \leq 2(n-1)h \, \| f^{(n)} \|_{L^p(0,1)} + 2\left(\frac{2}{h}\right)^{n-1} \| f \|_{L^p(0,1)}$$

Da questo punto in poi si procede come nella dimostrazione della Proposizione 2. ▨

Le disuguaglianze dimostrate nelle proposizioni 1, 2, 3 sono esempi di <u>stime interpolatorie</u>

<u>Esercizio 1.</u>

Verificare che l'esponente $1 - \frac{k}{n}$ nelle (2) - s8 e nella (3) - s12 (Suggerimento: per evitare inutili calcoli si può osservare che le disuguagliante (2) - s8 e (3) - s12 valgono, con eventuali modifiche delle costanti $C_{n,k}$, per funzioni a valori complessi. Dopo di che, invece di funzioni trigonometriche come la (3) - s5 si può prendere l'esponenziale complesso).

<u>Esercizio 2.</u>

Definiamo, per $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $0 < \gamma \leq 1$,

$$|f|_{\gamma,[a,b]} := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma} \;\middle|\; x,y \in [a,b],\ x \neq y \right\}$$

e, per $k \geq 0$ intero,

$$C^{k,\gamma}([a,b]) = \left\{ f \in C^k([a,b]) \;\middle|\; |f^{(k)}|_{\gamma,[a,b]} < +\infty \right\}$$

$$\| f \|_{C^{k,\gamma}([a,b])} = \sum_{j=0}^{k} \| f^{(j)} \|_{L^\infty(a,b)} + | f^{(k)} |_{\gamma,[a,b]} .$$

(i) Dimostrare che, se $0 < \alpha < \beta \leq 1$ e $f \in C^{0,\beta}([a,b])$,

$$| f |_{\alpha,[a,b]} \leq C (b-a)^{-\alpha} \left[(b-a)^\beta |f|_{\beta,[a,b]} + \| f \|_{L^\infty(a,b)} \right]^{\frac{\alpha}{\beta}} \| f \|_{L^\infty(a,b)}^{1-\frac{\alpha}{\beta}}$$

dove C dipende da α e β soltanto.

(ii) Dimostrare se $f \in C^{1,\alpha}([a,b])$

$$\| f' \|_{L^\infty(a,b)} \leq C (b-a)^{-1} \left[(b-a)^{1+\alpha} |f'|_{\alpha,[a,b]} + \| f \|_{L^\infty(a,b)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \| f \|_{L^\infty(a,b)}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

dove C dipende solo da α.

(<u>Suggerimento</u> <u>per</u> (i). Sia $h \in (0, b-a]$, se $|x-y| \leq h$ si ha $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq |f|_{\beta,[a,b]} h^{\beta-\alpha}$; se $|x-y| > h$ si ha $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq 2 \dfrac{\|f\|_{L^\infty(a,b)}}{h^\alpha}$. Quindi $|f|_{\alpha,[a,b]} \leq \dots$

<u>Suggerimento</u> <u>per</u> (ii). Osservare che invece di (4)-s1 si ha $\left| f'(x) - \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \leq h^\alpha |f'|_{\alpha,[0,1]} \quad \dots$).