Cenni alle equazioni integrali

Elisa Francini e Sergio Vessella

1 Equazioni integrali

Le equazioni integrali del primo tipo costituiscono un modello per i problemi inversi lineari. Prendiamole in considerazione per quanto riguarda le questioni di esistenza, unicità e stabilità delle soluzioni.

Consideriamo per semplicità funzioni di una variabile definite nell'intervallo $(0, 1)$. Nelle equazioni che seguono la funzione y è nota e la funzione x è l'incognita da determinare. La funzione k, nota, si dice nucleo dell'equazione integrale.

Le equazioni che possono essere classificate nel modo seguente:

Equazione di Fredholm del primo tipo

$$\int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt = y(s), \quad 0 \le s \le 1. \tag{1}$$

Equazione di Volterra del primo tipo

$$\int_0^s k(s,t)x(t)\,dt = y(s), \quad 0 \le s \le 1. \tag{2}$$

Le equazioni di Volterra possono chiaramente essere considerate equazioni di Fredholm con $k(s,t) = 0$ per $t > s$.

Equazione di Fredholm del secondo tipo

$$x(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt + y(s), \quad 0 \le s \le 1, \tag{3}$$

Equazione di Volterra del secondo tipo

$$x(s) = \int_0^s k(s,t)x(t)\,dt + y(s), \quad 0 \le s \le 1. \tag{4}$$

1.1 Equazioni del primo tipo

Esistenza

Per l'esistente della soluzione dell'equazione (1) occorre tenere presente che la funzione y non solo dipende da x, ma eredita, attraverso la variabile s certe proprietà strutturali e qualitative dal nucleo k. Quindi la forma di k può causare severe restrizioni alla forma delle funzioni y per le quali l'equazione (1) ha soluzione. Per fare un esempio estremo, se $k(s,t) = 1$ per ogni $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$, allora esistono soluzioni dell'equazione integrale (1) se e solo se y è costante.

Esempio 1.1 Un nucleo $k(s,t)$ si dice *degenere* se ha la forma

$$k(s,t) = \sum_{j=1}^{n} S_j(s)T_j(t).$$

Si vede facilmente che, se k è degenere, allora l'equazione (1) non ha soluzione se y non appartiene allo spazio generato dalle funzioni $\{S_1, \ldots, S_n\}$ (condizione necessaria).

Inoltre, se

$$\int_0^1 T_i(t)T_j(t)dt = \delta_{ij},$$

per ogni y della forma

$$y(s) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j S_j(s)$$

si ha che

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T_j(t)$$

risolve l'equazione.

<u>Unicità</u>

In generale non ci si può aspettare che equazioni della forma (1) abbiano una soluzione unica. Infatti, nell'esempio semplice $k(s,t) = 1$ è evidente che per ogni funzione costante $y(s) = c$ si hanno infinite soluzioni che verificano l'equazione: per esempio tutte le funzioni a scala della famiglia $x_n(t) = nc\mathbf{1}_{(0,1/n)}(t)$ per $n \in \mathbf{N}$ sono soluzioni.

Osserviam che l'eqauzione integrale è lineare, quindi l'unicità della soluzione coincide con la banalità del nucleo dell'operatore.

Alcuni esempi di non unicità vengono prodotti dalle relazioni di ortogonalità; per esempio, se $k(s,t) = a(s)\sin \pi t$, allora ognuna delle funzioni

$$x(t) = \sin n\pi t, \quad n = 2, 3, \ldots$$

è soluzione dell'equazione

$$\int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt = 0.$$

Esempio 1.2 Supponiamo che, per $0 \le t \le 1$, $k(s,t) = 0$ per $0 \le s < 1/2$ e $k(s,t) = 1$ per $1/2 \le s \le 1$. Mostrare che $x(t) = 0$ e $x(t) = t - 1/2$ sono entrambe soluzioni di $\int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt = 0$, per $0 \le s \le 1$.

Esempio 1.3 Questo non significa che non si abbia mai l'unicità delle soluzioni per le equazioni di Fredholm di primo tipo.

Sia $k(s,t) = e^{st}$ e sia $x(t)$ una funzione che appartiene al nucleo dell'operatore, cioè tale che

$$\int_0^1 e^{st}x(t)dt = 0 \quad \forall s \in (0,1).$$

Derivando n volte l'equazione rispetto a s e ponendo $s = 0$ si ottiene

$$\int_0^1 t^n x(t) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

da cui segue che

$$\int_0^1 p(t)x(t)dt = 0 \qquad \text{per ogni polinomio } p.$$

Per il Teorema di approssimazione di Weierstrass i polinomi sono densi nello spazio delle funzioni continue, quindi la funzione continua $x(t)$ può essere approssimata da un polinomio e

$$\int_0^1 x^2(t)dt = 0 \Rightarrow x \equiv 0.$$

Esempio 1.4 Esempi di non unicità per l'equazione di Volterra di primo tipo si costruiscono con nuclei della forma

$$k(s,t) = ms - (m+1)t,$$

per i quali

$$\int_0^s (ms - (m+1)t)(ct^{m-1})dt \equiv 0 \quad \forall c \in \mathbf{R}$$

Instabilità

La mancanza di stabilità è il punto centrale per le equazioni integrali di prima specie. Essa non dipende da forme particolari del nucleo, ma è una caratteristica fondamentale e segue dal

Lemma di Riemann-Lebesgue. *Se $k(\cdot,\cdot) \in L^2([0,1] \times [0,1])$, allora*

$$\int_0^1 k(\cdot,t) \sin n\pi t \, dt \to 0 \quad \textit{as} \quad n \to \infty$$

dove la convergenza si intende in norma L^2.

Quindi, una perturbazione significativa (in norma L^2) della forma $\sin n\pi t$ ad una soluzione $x(t)$ dell'equazione (1) porta, per n grande, ad una perturbazione insignificante dell'effetto $y(s)$.

1.2 Equazioni integrali del secondo tipo

Prendiamo adesso brevemente in considerazione le equazioni integrali di Volterra del secondo tipo (4).Si dimostra che sono risolubili se il nucleo k e il dato y sono ragionevoli e che le soluzioni dipendono con continuità dai dati.

Proposizione 1.1 *Sia k continuo in $0 \le t \le s \le 1$. Per ogni $y \in C(0,1)$ esiste una e una sola soluzione dell'equazione (4) e tale soluzione dipende con continuità da y.*

Dim. Si costruisce una soluzione utilizzando il metodo delle approssimazioni successive. Definiamo per ricorrenza la successione

$$\begin{aligned}
x_0(s) &= y(s) \\
x_1(s) &= \int_0^s k(s,t)x_0(t)\,dt + y(s) \\
&\dots \\
x_n(s) &= \int_0^s k(s,t)x_{n-1}(t)\,dt + y(s) \qquad (5)
\end{aligned}$$

Vogliamo mostrare che la successione $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a $\overline{x} \in C(0,1)$ per $n \to \infty$ e che $\overline{x}$ è soluzione di (4).

Possiamo scrivere il termine n-esimo della successione come somma parziale di una serie telescopica:

$$x_n(s) = y(s) + \sum_{j=1}^{n}\{x_j(s) - x_{j-1}(s)\}.$$

La successione x_n converge se la serie telescopica è convergente. Chiamiamo $K = \max\{|k(s,t)| \,:\, 0 \le t \le s \le 1\}$ e stimiamo:

$$\begin{aligned}
|x_1(s) - x_0(s)| = \left|\int_0^s k(s,t)y(t)\,dt\right| &\le \|y\|_{C^0(0,1)}\int_0^s |k(s,t)|\,dt \\
&\le K\|y\|_{C^0(0,1)}s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x_2(s) - x_1(s)| = \left|\int_0^s k(s,t)(x_1(t) - x_0(t))\,dt\right| &\le \int_0^s K^2\|y\|_{C^0(0,1)}t\,dt \\
&\le K^2\|y\|_{C^0(0,1)}\frac{s^2}{2},
\end{aligned}$$

$$|x_j(s) - x_{j-1}(s)| \le \|y\|_{C^0(0,1)}\frac{(Ks)^j}{j!}.$$

La serie risulta quindi uniformemente convergente ad una $\overline{x} \in C(0,1)$. Passando al limite per $n \to \infty$ nella (5) si ottiene che $\overline{x}$ è soluzione dell'equazione integrale. Per quando riguarda la stabilità si osserva che

$$\|\overline{x}\|_{C^0} \le \sum_{j=1}^{\infty}\|x_j - x_{j-1}\|_{C^0} + \|y\|_{C^0} \le \|y\|_{C^0}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{K^j}{j!} = e^K\|y\|_{C^0}.$$

Osservazione 1.2 Esiste una tecnica standard per ridurre alcune equazioni integrali di Volterra del primo tipo

$$\int_0^s k(s,t)x(t)\,dt = y(s), \qquad (6)$$

ad equazioni integrali di Volterra del secondo tipo. Se, infatti, il nucleo k è continuo e derivabile rispetto ad s con derivata continua per $0 \le t \le s \le 1$,

$y'(s)$ è continua per $0 \leq s \leq 1$ e $k(s,s) \neq 0$ per $0 \leq s \leq 1$, allora, derivando la (6) rispetto ad s e dividendo per $k(s,s)$ si ha

$$x(s) + \int_0^s \left(\frac{\partial k}{\partial s}(s,t)/k(s,s) \right) x(t)\, dt = y'(s)/k(s,s). \tag{7}$$

Questa equazione è ben posta nello spazio delle funzioni continue. Notiamo che il problema della stabilità persiste perchè, a causa della presenza della derivata di y, piccoli cambiamenti nel secondo membro della (6) possono portare a grandi cambiamenti nel secondo membro della (7). Quindi, la trasformazione dell'equazione dal primo al secondo tipo sposta semplicemente l'instabilità nel processo di derivazione.

Esercizio 1.1 Sia $\phi(s) = \int_0^s x(\tau)\, d\tau$. Integramo la (6) per parti per ottenere l'equazione integrale di Volterra del secondo tipo

$$\phi(s) - \int_0^s \left(\frac{\partial k}{\partial t}(s,t)/k(s,s) \right) \phi(t)\, dt = y(s)/k(s,s).$$

Con questo procedimento si aggira l'ostacolo dell'instabilità?

Concludiamo infine questo paragrafo osservando che la risoluzione delle equazioni di Fredholm di seconda specie non è sempre semplice come quella delle equazioni di Volterra di seconda specie. Le equazioni di Fredholm possono presentare degli autovettori, cioè possono esistere funzioni non nulle che soddisfano

$$x(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\, dt.$$

La presenza di questi autovettori influenza l'esistenza e, soprattutto, l'unicità della soluzione. Esistono comunque risultati analoghi a quello mostrato per le equazioni di Volterra, ad esempio:

Proposizione 1.3 *Sia k continuo in $[0,1] \times [0,1]$ con $\sup\{|k(s,t)| : (s,t) \in [0,1]^2\} < 1$. Per ogni $y \in C(0,1)$ esiste una e una sola soluzione dell'equazione (3) e tale soluzione dipende con continuità da y.*