Buona posizione. L'esempio di derivazione e integrazione.

Elisa Francini e Sergio Vessella

1 Problemi mal posti

Negli esempi di problemi inversi che abbiamo presentato nel precedente paragrafo, c'è una differenza fondamentale tra il problema diretto e quello inverso. In tutti i casi il problema inverso è *mal posto* (o *impropriamente posto*) *nel senso di Hadamard*, mentre il problema diretto è ben posto. La definizione di problema ben posto risale agli anni '20 ed è dovuta appunto ad Hadamard. Egli afferma che un modello matematico per un problema fisico (si pensi ad esempio ad un problema al bordo per una equazione differenziale) deve essere *ben posto*, vale a dire, deve avere le seguenti proprietà:

Esistenza: il problema ammette una soluzione;

Unicità: esiste al più una soluzione;

Stabilità: la soluzione dipende con continuità dai dati.

Matematicamente, l'esistenza di una soluzione si può forzare allargando lo spazio delle soluzioni (il concetto di soluzione debole di una equazione differenziale rientra in questo ordine di idee) o restringendo l'insieme dei dati.

Se il problema ha più di una soluzione si potrebbe comunque aggiungere un criterio per scegliere tra le possibili soluzioni. Ad esempio prendere la soluzione a norma minima, oppure positiva etc.

La richiesta di stabilità risulta in sostanza la più importante. Se il problema non ha proprietà di stabilità, le sue soluzioni sono praticamente impossibili da calcolare perchè ogni misurazione e ogni calcolo numerico sono comunque inquinati da inevitabili errori, quindi i dati del problema sono sempre perturbati da qualche forma di rumore. Se la soluzione di un problema non dipende con continuità dai dati, la soluzione calcolata potrebbe non aver niente a che fare con la soluzione reale. In realtà, non c'è modo di superare questa difficoltà, a meno che non siano disponibili ulteriori informazioni sulle soluzioni.

Nessun trucco matematico può porre rimedio ad una mancanza di informazione [C. Lanczos, 1961]

Analizziamo adesso la buona posizione del problema diretto e del problema inverso descritti da un funzionale K.

Sia $K : X \to Y$ un operatore tra due spazi di Banach. Possiamo definire, a partire da questo operatore un problema diretto e un problema inverso.
Problema diretto:

$$\text{data } x \in X \text{ calcolare } y = Kx.$$

Problema inverso:

$$\text{data } y \in Y \text{ trovare } x \in X \text{ tale che } Kx = y.$$

Buona posizione del problema diretto

Esistenza e unicità: fanno parte della definizione di K come operatore da X in Y.

Stabilità: la soluzione dipende con continuità dai dati se $x_n \to x_0$ in X implica $Kx_n \to Kx_0$ in Y, cioè se K è un operatore continuo.

Buona posizione del problema inverso

Esistenza: la soluzione del problema esiste per ogni y appartenente all'immagine di K, cioè $y \in \mathcal{R}(K)$.

Unicità: l'operatore K è iniettivo.

Questo implica l'esistenza dell'operatore inverso

$$K^{-1} : \mathcal{R}(K) \to X.$$

Stabilità: la soluzione dipende con continuità dai dati se $y_n \to y_0$ in $\mathcal{R}(K)$ implica $x_n = K^{-1}y_n \to x_0 = K^{-1}y_0$ in X, cioè K^{-1} è un operatore continuo.

Osservazione 1.1 *Se l'operatore K è lineare:*

$$K \text{ è iniettivo} \Leftrightarrow \text{il suo nucleo è banale, cioè } \mathcal{N}(K) = \{0\}.$$

$$K \text{ è continuo} \Leftrightarrow K \text{ è limitato, cioè } \|Kx\| \leq \|K\|\|x\| \text{ per ogni } x \in X.$$

Quindi, se K è un operatore lineare, il problema diretto è ben posto se K è limitato, mentre il problema inverso è ben posto se $\mathcal{N}(K) = \{0\}$ e K^{-1} è limitato.

Osservazione 1.2 *Esistenza e unicità della soluzione dipendono dalla natura algebrica degli spazi, mentre la stabilità dipende in modo essenziale dalla topologia, cioè dalle norme degli spazi X e Y.*

La stabilità è una proprietà molto importante del problema inverso: supponiamo che K sia un operatore lineare continuo e invertibile e sia $\overline{x}$ la soluzione esatta che stiamo cercando e $\overline{y} = K\overline{x}$ sia il dato esatto. Siccome le misurazioni sono affette da errore, in realtà invece del dato $\overline{y}$ noi conosciamo y_δ con

$$\|y - y_\delta\| \leq \delta,$$

quindi la soluzione che calcoliamo (se $y_\delta \in \mathcal{R}(K)$) è

$$x_\delta = K^{-1}y_\delta.$$

Che errore stiamo facendo rispetto alla soluzione esatta $\overline{x}$? Stimiamo

$$\|\overline{x} - x_\delta\| = \|K^{-1}(\overline{y} - y_\delta)\|.$$

Se K^{-1} è un operatore limitato, allora

$$\|\overline{x} - x_\delta\| \leq \|K^{-1}\|\|\overline{y} - y_\delta\| \leq \|K^{-1}\|\delta.$$

Se invece K^{-1} non è un limitato, l'errore sulla soluzione può essere molto grande.

1.1 Un esempio: derivazione e integrazione

Vediamo adesso un po' in dettaglio due problemi che ci sono familiari e che sono uno l'inverso dell'altro: integrazione e derivazione. Quale dei due è il problema diretto e quale quello inverso?

Se invece guardiamo dal punto di vista storico, l'idea di integrazione risale ad Archimede, mentre per arrivare ad introdurre propriamente il concetto di derivazione si deve aspettare il calcolo infinitesimale di Newton e Leibnitz.

Come decidiamo allora quale dei due problemi è più giusto chiamare diretto e quale inverso? Andiamo a vedere se uno dei due è ben posto e l'altro no.

Scriviamo il problema nella forma seguente:

$$Kx = y$$

dove x e y appartengono a qualche spazio di funzioni definite, ad esempio sull'intervallo $[0,1]$ e

$$(Kx)(s) := \int_0^s x(t)\,dt.$$

Quindi, se conosco x e voglio calcolare y devo integrare, mentre se conosco y e cerco la funzione x devo derivare, infatti, per esempio se x è continua, per il Teorema Fondamentale del calcolo integrale $y'(t) = x(t)$.

La buona o cattiva posizione di un problema dipende ovviamente dagli spazi funzionali nei quali si scelgono dato e soluzioni. Per il problema dell'integrazione, prendiamo in considerazione, ad esempio lo spazio delle funzioni continue, cioè consideriamo

$$K : C[0,1] \to C[0,1].$$

Osserviamo che ogni funzione continua in $[0,1]$ è integrabile su tale intervallo e che la funzione integrale che ne risulta (cioè la y) è ancora una funzione continua (anzi è derivabile con derivata continua). Quindi il problema di calcolare y, assegnata x ha una soluzione. Tale soluzione è anche unica per definizione di integrale.

Vediamo adesso se il problema dell'integrazione è stabile, cioè se, date due funzioni x_1 e x_2 vicine, anche $y_1 = Kx_1$ e $y_2 = Kx_2$ sono vicini. Dal momento che l'operatore K è lineare, questo equivale a chiedersi se K è un operatore limitato.

Sia $\|x_1 - x_2\|_\infty \le \varepsilon$, allora

$$\begin{aligned} |Kx_1(s) - Kx_2(s)| &= \left| \int_0^s (x_1(t) - x_2(t))\,dt \right| \\ &\le \int_0^s |x_1(t) - x_2(t)|\,dt \le \varepsilon \int_0^s dt = \varepsilon s \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Osservazione 1.3 *Un risultato del tutto analogo si ottiene considerando uno spazio funzionale diverso: ad esempio* $L^1(0,1)$.

$$\begin{aligned} \|y\|_1 &= \int_0^1 \left| \int_0^t x(s)\,ds \right| dt \\ &\le \int_0^1 \int_0^t |x(s)|\,ds\,dt \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |x(s)|\,ds \right) dt = \int_0^1 \|x\|_1 dt = \|x\|_1. \end{aligned}$$

Prendiamo invece in considerazione il problema della derivazione.

Assegnata una funzione y, determinare la soluzione x del problema $Kx = y$ significa trovare $x(t)$ tale che

$$\int_0^s x(t)dt = y(s).$$

Derivando rispetto alla variabile s si ha

$$x(s) = y'(s)$$

cioè la soluzione del problema inverso è la derivata del dato.

Osserviamo in primo luogo che l'operatore $K : C[0,1] \to C[0,1]$ non è suriettivo. Possiamo perè facilmente vedere che

$$\mathcal{R}(K) = \{y \in C^1[0,1] \,:\, y(0) = 0\}.$$

K è invece un operatore iniettivo, supponiamo infatti che $Kx_1(t) = Kx_2(t)$ per ogni $t \in (0,1)$, avremo allora che $x_1(t) = (Kx_1)'(t) = (Kx_2)'(t) = x_2(t)$. Quindi, in sostanza, K^{-1} esiste purchè ristretto al range di K.

Per capire se il problema della derivazione è ben posto, vediamo se K^{-1} risulta anche lui un operatore limitato. Se K^{-1} fosse limitato, le immagini di insiemi limitati dovrebbero rimanere ancora limitati, ma questo non accade e lo chiarisce questo esempio.

Consideriamo la successione di funzioni

$$\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Questo è un insieme limitato, perchè $\|\sin(nx)\|_{C^0[0,1]} \le 1$ per ogni n. Tuttavia,

$$\|K^{-1}\sin(nx)\|_{C^0} = \|n\cos(nx)\|_{C^0} = n \to \infty \quad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Vediamo cosa significa può significare questo per un problema applicativo. Supponiamo di essere interessati a conoscere la derivata di una certa funzione che misuriamo con una approssimazione δ. Cioè vogliamo calcolare $f'(x)$ per $x \in (0,1)$ avendo misurato la funzione $f_\delta(x)$ e sapendo che

$$f(x) = f_\delta(x) + r(x),$$

dove r è il rumore e $\|r\|_\infty < \delta$.

Per prima cosa abbiamo il problema di stabilire se f_δ e r sono derivabili. In generale f_δ sarà nota puntualmente e r potrebbe essere qualunque funzione. Supponiamo comunque di essere in questa situazione favorevole: sia f_δ che r sono derivabili, quindi

$$f'(x) = f'_d(x) + r'(x).$$

Prendendo per buono il valore di f'_δ commettiamo un errore dell'ordine di $\|r'\|_\infty$. Ma tale errore può essere grandissimo: se $r(x) = \delta\sin(nx/\delta)$, allora $\|r'\|_\infty = \|n\cos(nx/\delta)\|_\infty = n$ può essere arbitrariamente grande.

Ci chiediamo allora se questo problema dipende dal fatto che le norme che abbiamo preso in considerazione possono non essere quelle giuste.

Esercizio 1.1 *Verificare che la situazione non cambia considerando spazi di tipo L^p.*

Il fenomeno che abbiamo descritto è piuttosto caratteristico di certi problemi inversi. Il problema diretto (in questo caso l'integrazione di una funzione continua) è un processo regolarizzante (smoothing), nel senso che errori fortemente oscillanti (del tipo $n\cos(nx/\delta)$) vengono smorzati dall'integrazione (divenendo $\delta\sin(nx/\delta)$) e hanno un effetto "trascurabile" sul dato del problema inverso. Questo smorzamento è responsabile del fatto che errori di ampiezza piccola ma con alta frequenza creano grandi oscillazioni nella soluzione del problema inverso.

Questo è appunto un fenomeno generale: se il problema diretto è regolarizzante, ci si aspetta che nella soluzione del problema inverso compaiano oscillazioni dovute alla presenza di piccole perturbazioni ad alta frequenza.

Naturalmente anche per la derivazione è possibile trovare qualche norma o qualche spazio funzionale nel quale essa risulta una operazione ben posta. Supponiamo, per esempio di considerare

$$K : C[0,1] \to C^1[0,1]$$

cioè di equipaggiare lo spazio di arrivo con la norma C^1. In tal caso,

$$\|K^{-1}y\|_{C^0} = \|x\|_{C^0} = \|y'\|_{C^0} \le \|y\|_{C^1},$$

per cui l'operatore K^{-1} è limitato con norma minore di 1. In questo caso gli errori dell'esempio precedente ($\delta\sin(nx/\delta)$) non sono più errori piccoli perché la loro norma C^1 è dell'ordine di n. Osserviamo che questa scelta delle norme è difficilmente giustificabile nelle applicazioni.

È anche possibile eliminare l'instabilità modificando non la norma ma lo spazio funzionale che consideriamo. Supponiamo infatti di potersi restringere a considerare solamente funzioni y lineari, cioè della forma $y(t) = at$ con a costante e $0 < t < 1$. Su tale ristretto spazio lineare consideriamo, per esempio, la norma L^2.

$$\|y\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (at)^2\,dt = \frac{a^2}{3}$$

Invece,

$$\|K^{-1}y\|_{L^2}^2 = \|y'\|_{L^2}^2 = \int_0^1 a^2\,dt = a^2,$$

e quindi

$$\|K^{-1}y\|_{L^2} = |a| = \sqrt{3}\frac{|a|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\|y\|_{L^2}$$

Quindi in questo spazio ristretto di funzioni, la derivazione è un funzionale limitato. Questa osservazione concorda anche con l'intuizione: il processo di derivazioni non può rendere più irregolare una funzione lineare.

Come possiamo allora derivare una funzione che conosciamo solo per punti? Abbiamo visto che volendo affrontare il problema utilizzando spazi funzionali ragionevoli il problema risulta mal posto. Possiamo però cercare di risolverlo se abbiamo a disposizione ulteriori informazioni.

Supponiamo ancora di voler calcolare f' conoscendo un valore approssimato di f, cioè conoscendo f_δ in modo tale che $\|f - f_\delta\|_{L^2} \le \delta$. Ovviamente, conoscendo solo il dato approssimato non possiamo sperare di ritrovare esattamente la derivata di f: dobbiamo accontentarci di calcolare una funzione che assomiglia alla derivata di f. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{S} = \{g : \|g - f_\delta\|_{L^2} < \delta,\ g(0) = f_\delta(0) = 0\}.$$

delle funzioni che hanno distanza da f_δ minore di δ. Questo insieme contiene sicuramente f e ognuna di tali funzioni è, per la nostra capacità di misura, indistinguibile da f.

Supponiamo però di avere informazioni di altra origine su f. Supponiamo, per esempio di sapere che non è troppo oscillante e che i dati che raccogliamo sul bordo sono corretti.

Questo significa restringere l'insieme di arrivo ad

$$\mathcal{S}^1 = \{g : \|g - f_\delta\|_{L^2} < \delta,\ \|g''\|_{L_2} \leq E,\ g(0) = f_\delta(0) = 0,\ g(1) = f_\delta(1)\}.$$

La funzione f appartiene a questo insieme. Quale errore si commette calcolando la derivata di una qualunque altra funzione in $\mathcal{S}$, vale a dire: quanto vale $\|f' - g'\|_{L^2}$?

Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Sappiamo che $\|h\|_{L^2} \leq \|f - f_\delta\|_{L^2} + \|g - f_\delta\|_{L^2} \leq 2\delta$, $\|h''\|_{L^2} \leq \|f''\|_{L^2} + \|g''\|_{L^2} \leq 2E$, e $h(0) = h(1) = 0$, quindi

$$\begin{aligned}
\|h'\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 (h'(x))^2 dx = \left(h(x)h'(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 h(x)h''(x)dx \right) \\
&\leq \|h\|_{L^2}\|h''\|_{L^2} \leq 4\delta E,
\end{aligned}$$

da cui si ricava che

$$\|f' - g'\|_{L^2} \leq 2\sqrt{E\delta}, \quad \text{per ogni} \quad g \in \mathcal{S}.$$

Abbiamo quindi ripristinato la stabilità del problema aggiungendo l'*informazione a priori* sulla limitatezza della derivata seconda della funzione di nostro interesse.