

Problemi Inversi. Introduzione ed esempi

Elisa Francini e Sergio Vessella

1 Che cosa sono i problemi inversi

Per i matematici i problemi inversi sono un argomento molto recente. Il loro studio è motivato dallo sviluppo tecnologico degli ultimi decenni; ad esempio, alcune delle più sofisticate macchine per diagnosi mediche (TAC, SPECT, etc) non fanno altro che risolvere problemi inversi: infatti ricostruiscono oggetti 2 e 3 dimensionali dalle loro proiezioni.

D'altra parte i problemi inversi hanno invece radici antiche: più di 2000 anni fa Platone nel VII libro de La Repubblica descrive una situazione che risulta un problema inverso: i prigionieri della caverna vorrebbero ricostruire il mondo reale fuori dalla caverna sulla base di informazioni limitate che consistono nelle ombre proiettate sul fondo della caverna.



A questo punto l'ideale sarebbe poter fornire una definizione chiara ed inequivocabile di problema inverso, ma questo non è possibile (almeno non nello stesso modo nel quale si definisce cos'è un gruppo o uno spazio di Hilbert).

Cercheremo di avvicinarci lentamente alla comprensione di cosa sia un problema inverso: alla fine saremo in grado di riconoscere un problema inverso quando lo incontreremo.

Per prima cosa osserviamo che parlare di problema inverso presuppone l'esistenza di un altro problema (che viene detto diretto) al quale il problema inverso è strettamente correlato.

Diciamo che due problemi sono uno l'inverso dell'altro quando la formulazione di uno coinvolge necessariamente l'altro.

Di questa coppia di problemi uno dei due viene detto *diretto* e l'altro *inverso*. In genere, viene chiamato problema diretto quello che è stato studiato più nel dettaglio e per primo, mentre viene detto problema inverso quello meno (o più recentemente) considerato. In realtà ci sono anche altri motivi che permettono di effettuare questa distinzione, ma ne parleremo più tardi.

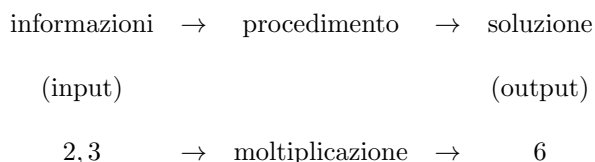
Per non rimanere nel vago, facciamo un semplice esempio concreto. Fin da bambini impariamo a risolvere questo problema: *dati due numeri interi, trovarne il prodotto*. L'inverso di questo problema consiste nel trovare una coppia di fattori di un numero assegnato.

Dal momento che ci viene insegnato per primo, abbiamo stabilito di chiamare problema diretto quello della moltiplicazione e problema inverso la fattorizzazione.

Osserviamo che il problema inverso si presenta già molto più complicato di quello diretto; ad esempio, è un problema che, in generale, non ha un'unica soluzione. Se restringiamo la classe dei numeri che vogliamo fattorizzare a quelli che ammettono una sola scomposizione in fattori, ci troviamo a studiare la classe dei numeri primi e la questione si complica.

Quando si parla di problemi che derivano dal mondo reale, nella maggior parte dei casi c'è una distinzione naturale tra problemi diretti e inversi.

Gran parte della matematica che si studia nei primi anni di corso è dominata dai problemi diretti, cioè problemi nei quali si forniscono sufficienti informazioni per poter avviare un procedimento ben definito e stabile che porta ad una unica soluzione del problema.



Se il processo descrive un fenomeno fisico, o comunque del mondo reale, si può descrivere il problema diretto come



$$x \rightarrow K \rightarrow y,$$

cioè

$$K(x) = y. \tag{1}$$

Il problema diretto consiste nell'assegnare la causa x e il modello K e calcolare l'effetto y .

Questo però è solo uno dei tre modi nei quali si può leggere l'equazione (1): ogni problema diretto suggerisce immediatamente due problemi inversi: 1) dato il modello K e l'effetto y , risalire alla causa x , 2) data la causa x e l'effetto y , costruire un modello K .

Queste ultime due letture dell'equazione (1) corrispondono in genere a problemi inversi.

Quindi, ricapitolando: se si vuole predire il comportamento futuro di un sistema fisico conoscendo il suo stato presente e le leggi fisiche che lo governano, allora diciamo che vogliamo risolvere un problema diretto. Viceversa, risalire allo stato passato di un sistema dalla conoscenza della condizione presente, oppure determinare il valore di certi parametri fisici, conoscendo l'evoluzione del sistema, vengono detti problemi inversi.

Dal punto di vista applicativo ci sono due motivazioni diverse che giustificano lo studio di questi problemi inversi:

Conoscere lo stato passato o i parametri che regolano un sistema (es: diagnosi mediche),

Controllare lo stato finale del sistema modificando lo stato presente o i parametri del modello (es: produzione industriale di manufatti).

Per questo tipo di problemi originati dalle applicazioni possiamo dire che si affronta un problema inverso quando si cercano le cause di un determinato effetto osservato o desiderato.

Dal punto di vista puramente matematico, esiste però una ulteriore e decisiva distinzione tra problema diretto e inverso: il problema diretto gode di certe buone proprietà che corrispondono alla definizione di problema *ben posto*, mentre il problema inverso è solitamente *mal posto*.

Introduciamo brevemente la nozione di problemi ben posti e mal posti, che riprenderemo ampiamente durante tutto il corso.

Nel 1923, J. Hadamard dette la seguente definizione di *problema ben posto*:

1. Esiste una soluzione del problema (esistenza).
2. La soluzione è unica (unicità).
3. La soluzione dipende con continuità dai dati (stabilità).

Viceversa, un problema si dice *mal posto* quando non verifica una di queste condizioni. Ad esempio, è mal posto un problema che non ha soluzioni, oppure che ne ha più di una. Ma la condizione più esigente è quella della stabilità. Ci sono numerosi problemi che hanno una e una sola soluzione, ma tale soluzione è instabile. In parole povere l'instabilità significa che cause molto diverse possono provocare effetti molto simili rendendo così vano il tentativo di risalire ad esse.

Concludiamo questa lezione con alcuni esempi storici di problemi inversi.

Esempio 1.1 *Il mito della caverna di Platone (428-348 A.C.)*. Nel mito della caverna, risulta piuttosto semplice decidere quale sia il problema diretto e quale quello inverso. È chiaro che, conoscendo la posizione del fuoco e del muro e gli oggetti le cui ombre vengono proiettate, si determinano in modo unico le ombre. Inoltre oggetti simili in posizioni simili proiettano ombre che si assomigliano. In altre parole 'proiettare le ombre su un muro' è un problema diretto ben posto.

Il problema inverso consiste invece nel trovare la forma dell'oggetto la cui ombra si sta proiettando. Ovviamente il problema non ha una soluzione unica: infiniti oggetti possono avere tutti la stessa ombra sul muro. Ad esempio un cubo unitario con una faccia parallela al muro e un cilindro con asse parallelo al muro, altezza e diametro unitari, hanno esattamente la stessa ombra, cioè un quadrato di lato uno.

La tomografia geometrica è un settore della matematica che si occupa di ricostruire un corpo dalle sue proiezioni (ovviamente più di una).

Esempio 1.2 *Il bagno di Archimede*. Questo racconto rappresenta una delle prime indagini non invasive delle quali si ha notizia. Si dice che il tiranno Gerone di Siracusa avesse commissionato una nuova corona d'oro, ma temesse che l'orafo lo avesse truffato sostituendo parte dell'oro che gli era stato consegnato con argento. Ovviamente il peso della corona corrispondeva al peso dell'oro che era stato fornito all'orafo. Il tiranno chiese ad Archimede (287-212 A.C.) di capire se la truffa c'era stata. L'unico modo per sapere se la corona era composta

tutta da oro e non da una lega, sarebbe stato quello di conoscere il volume della corona stessa: infatti l'argento ha una densità diversa e per ottenere lo stesso peso è necessario avere un volume diverso. Tuttavia la forma della corona era tale che neanche Archimede sarebbe mai riuscito a calcolarne il volume. Avrebbe potuto fonderla in una forma più adeguata, ma questa sarebbe stata un'indagine *invasiva* avente come risultato finale la scoperta della verità e la distruzione del manufatto. Archimede ebbe quindi un'idea geniale: avrebbe ottenuto l'informazione voluta (il volume della corona) per via indiretta: misurando cioè il volume dell'acqua che sarebbe fuoriuscita da una bacinella piena nella quale si sarebbe immersa la corona. Confrontando questo volume con quello spostato da un pezzo di oro puro dello stesso peso, si sarebbe scoperto se l'orafo era in buona fede.

Esempio 1.3 *La scoperta di Nettuno.* Nettuno fu osservato per la prima volta il 23 settembre del 1846 da J. G. Galle e L. d'Arrest. La sua posizione era stata prevista sia dall'astronomo inglese Adams che dal francese Le Verrier, che la calcolarono indipendentemente l'uno dall'altro studiando l'orbita di Urano ed in base alle rispettive posizioni di Giove, Saturno e dello stesso Urano.

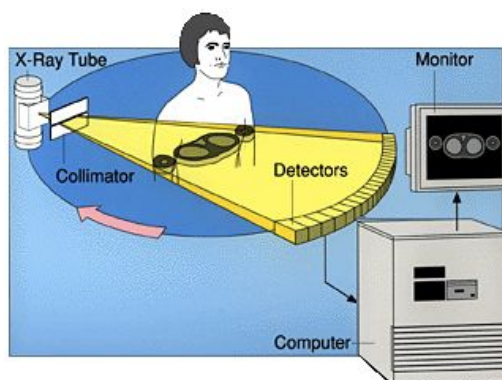
Gli astronomi avevano notato che l'ultimo pianeta allora conosciuto, Urano, non seguiva rigorosamente le leggi della meccanica celeste di Newton; anche le notevoli perturbazioni della sua orbita prodotte dai due pianeti giganti, Giove e Saturno, non potevano spiegare del tutto queste anomalie. Era stata perciò ipotizzata la presenza di un altro pianeta oltre l'orbita di Urano. Ma la contemporanea scoperta da parte di un astronomo francese e di uno inglese produsse il sorgere di una dura disputa internazionale sulla priorità per battezzare il nuovo pianeta. In realtà ci sono crediti comuni nella scoperta del pianeta e, come sempre, parecchie persone hanno dato il loro contributo. Ulteriori osservazioni hanno mostrato che le orbite calcolate da Adams e Le Verrier divergono, da quella corretta di Nettuno, abbastanza velocemente. Se avessero cercato la posizione stabilita del pianeta per un certo numero di anni prima o dopo, non avrebbero trovato niente vicino al luogo previsto.

2 Esempi di problemi inversi

2.1 Tomografia

L'applicazione che più ha contribuito a far conoscere i problemi inversi è la TAC (Tomografia Assiale Computerizzata). In inglese viene detta CAT scan da Computer Assisted Tomography.

La TAC misura l'attenuazione dei raggi X dovuta all'attraversamento di un corpo.



La macchina è costituita da due parti: gli emettitori di raggi X e i ricevitori, distribuiti con varie geometrie. Il raggio emesso in una certa direzione e con intensità nota, viene intercettato dal ricevitore dopo che ha attraversato il corpo da investigare. L'attenuazione che ha subito dipende dai materiali che ha attraversato. Materiali di natura diversa hanno coefficienti di assorbimento diversi. Effettuando diverse misurazioni per diverse direzioni, si cerca di avere un'idea della composizione interna del corpo.

Formalizziamo il procedimento in modo matematico in due dimensioni.

Sia $f(x, y)$ il coefficiente di attenuazione dei raggi X del tessuto nel punto (x, y) . Questo significa che un raggio X di intensità I che attraversa una piccola porzione Δu di tessuto nelle vicinanze del punto (x, y) subisce una attenuazione di intensità ΔI data da

$$\Delta I = -f(x, y)I(x, y)\Delta u. \quad (2)$$

Il raggio X viene emesso dalla sorgente con intensità I_0 e misurato dal ricevitore dopo aver percorso il segmento L che connette sorgente e ricevitore. Quello che si misura è l'attenuazione di I lungo la linea L .

Sommando i contributi ottenuti dalla (2) lungo il segmento L si ha

$$\int_L \frac{\Delta I}{I} = - \int_L f(x, y)\Delta u,$$

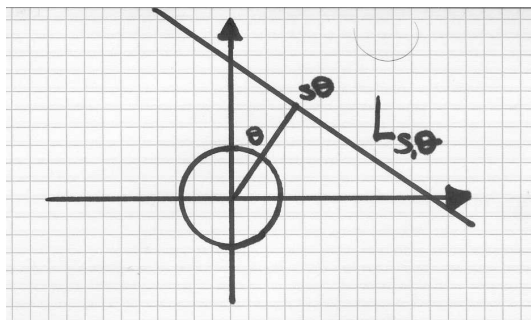
da cui

$$\ln \frac{I_1}{I_0} = - \int_L f(x, y) dL,$$

dove I_1 è l'intensità del raggio X misurata dal ricevitore.

Si può immaginare che fuori dal corpo che si vuole analizzare l'attenuazione sia trascurabile, vale a dire che f abbia supporto compatto. In tal caso si può sostituire al segmento L la retta che lo contiene (che indicheremo ancora con L).

Per ogni direzione θ in S^1 e per ogni $s \in \mathbf{R}$, sia $L_{\theta,s}$ la retta perpendicolare a θ e passante per $s\theta$ (cioè tale che sia s la distanza, con segno, dall'origine).



Parametizziamo la retta con

$$u \rightarrow s\theta + u\theta^\perp,$$

e scriviamo

$$\ln \frac{I_1}{I_0}(s, \theta) = - \int_L f(x, y) dL = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + u\theta^\perp) du.$$

Osserviamo che $\ln \frac{I_1}{I_0}(s, \theta)$ è il valore misurato in corrispondenza della coppia (s, θ) , cioè per una certa disposizione di sorgente e ricevitore.

L'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + u\theta^\perp) du$ è una funzione di s e θ che viene detta *Trasformata di Radon* e si indica

$$Rf(\theta, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\theta + u\theta^\perp) du. \quad (3)$$

Il problema inverso della TAC consiste quindi nel ricostruire f da misurazioni della sua trasformata di Radon Rf . Nel caso ideale che si avessero a disposizione tutte le possibili misurazioni, si tratterebbe quindi di invertire la trasformata di Radon.

Una trasformazione legata a quella di Radon è la trasformata a raggi X: per $\theta \in S^1$ e $x \in \mathbf{R}^2$,

$$Pf(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t\theta) dt,$$

cioè P calcola l'integrale di f lungo la retta passante per x e con direzione tangente θ .

In due dimensioni R e P rappresentano lo stesso operatore anche se parametrizzato in modo diverso. Si può infatti vedere che, indicata con θ^\perp la direzione perpendicolare a θ ,

$$Pf(\theta, x) = Rf(\theta^\perp, x \cdot \theta^\perp)$$

Le diverse parametrizzazioni portano a diverse simmetrie $Rf(-\theta, -s) = Rf(\theta, s)$, mentre $Pf(\theta, x) = Pf(\theta, x + t\theta)$ per ogni t .

Le due trasformate hanno però una generalizzazione diversa in \mathbf{R}^3 .
Per $\theta \in S^2$ e $s \in \mathbf{R}$,

$$Rf(\theta, s) = \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy,$$

è l'integrale di f sul piano per $s\theta$ ortogonale a θ , mentre per $\theta \in S^2$ e $x \in \mathbf{R}^3$,

$$Pf(\theta, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta) dt,$$

è ancora l'integrale sulla retta per x in direzione θ .

È interessante segnalare una relazione tra la Trasformata di Radon e la Trasformata di Fourier.

Supponiamo che f abbia supporto compatto contenuto in B_R . In tal caso

$$\text{supp}_s Rf(\theta, \cdot) \subset [-R, R], \quad \forall \theta \in S^{n-1}.$$

Ricordiamo che la Trasformata di Fourier di f è

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

e osserviamo che, preso $\theta \in S^{N-1}$ e $s \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(s\theta) &= \int_{\mathbf{R}^N} f(x) e^{-2\pi i s x \cdot \theta} dx = \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i s \tau} \int_{x \cdot \theta = \tau} f(x) d\sigma_x d\tau \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i s \tau} Rf(\theta, \tau) d\tau = \widehat{Rf}^2(\theta, s) \end{aligned}$$

dove con \widehat{Rf}^2 si indica la trasformata di Fourier 1-dimensionale rispetto alla seconda variabile.

Alcune proprietà utili della Trasformata di Fourier

$$\widehat{f+g}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi),$$

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} \quad \text{identità di Plancherel}$$

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi \quad \text{formula di inversione}$$

$$f \text{ a supporto compatto} \Rightarrow \hat{f} \text{ è analitica}$$

Da queste proprietà della Trasformata di Fourier segue l'unicità del problema inverso. Infatti, data la linearità del problema, l'unicità coincide con il mostrare che

$$Rf = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ in } \mathbf{R}^2,$$

che è una conseguenza dell'identità di Plancherel.

Inoltre, vale anche un risultato più generale nel caso di dati limitati: se conosciamo la Trasformata di Radon solo su un insieme aperto di direzioni, lo stesso abbiamo l'unicità della soluzione del problema inverso. Infatti,

$$Rf(\theta, s) = 0 \text{ for } |\theta| \leq \theta_0 \Rightarrow \hat{f}(s\theta) = 0 \text{ for } |\theta| \leq \theta_0,$$

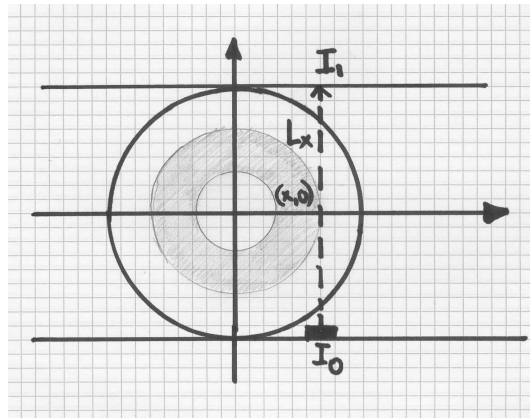
ma l'analiticità della Trasformata di Fourier implica $\hat{f} = 0$ in \mathbf{R}^2 e quindi $f = 0$ in \mathbf{R}^2 .

Tornando al caso bidimensionale, consideriamo un esempio semplificato nel quale il coefficiente di assorbimento f ha simmetria radiale, cioè,

$$f(x, y) = \tilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \tilde{f}(r).$$

In questo caso basta considerare le misurazioni corrispondenti a raggi paralleli ad una direzione assegnata.

Supponiamo che \tilde{f} abbia supporto nel cerchio di raggio R centrato nell'origine e indichiamo con L_x la retta parallela all'asse y e passante per il punto $(x, 0)$.



$$\begin{aligned} p(x) := -\ln \frac{I_1}{I_0}(x) &= \int_{L_x} f(x, y) dL_x = \int_{-R}^R f(x, y) dy \\ &= \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \tilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2}) dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \tilde{f}(\sqrt{x^2 + y^2}) dy. \end{aligned}$$

Con il cambiamento di variabile $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($dr = y dy / \sqrt{x^2 + y^2}$) si ottiene che la quantità nota $p(x)$ è data da

$$p(x) = \int_{|x|}^R \frac{2\tilde{f}(r)r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr. \quad (4)$$

Osserviamo che (4) è una equazione integrale del primo tipo, cioè della forma

$$\int k(x, y)f(y) dy = p(x).$$

Prendiamo in considerazione solo il caso $x > 0$, dal momento che per simmetria $p(x) = p(-x)$. Operiamo nella (4) il cambiamento di variabili

$$z = r^2 - x^2 \quad \text{e} \quad \tau = R^2 - x^2.$$

In questo modo $dz = -2r dr$, $x = \sqrt{R^2 - \tau}$, $r = \sqrt{R^2 - z}$ e

$$\begin{aligned} p(\sqrt{R^2 - \tau}) &= - \int_{R^2 - |x|^2}^0 \frac{\tilde{f}(\sqrt{R^2 - z})}{\sqrt{\tau - z}} dz \\ &= \int_0^\tau \frac{g(z)}{\sqrt{\tau - z}} dz, \end{aligned}$$

dove $g(z) = \tilde{f}(\sqrt{R^2 - z})$. Questa equazione fa parte della famiglia delle equazioni integrali di Abel che nella forma generale si scrivono

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = g(x), \quad \text{con } 0 < \alpha < 1.$$

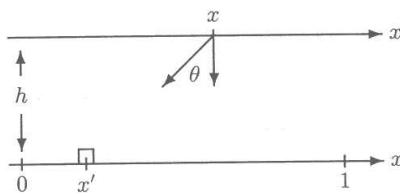
Per f in una ragionevole classe di funzioni si può dimostrare che la trasformata di Radon è invertibile, cioè esiste un operatore \tilde{R} tale che $\tilde{R} \circ R = Id$. Tuttavia, questo operatore inverso non è limitato e, come vedremo tra breve, questo significa che il problema della tomografia è mal posto. Più esattamente significa che se commettiamo un errore anche piccolo nella misurazione dell'attenuazione del raggio, l'errore si può ripercuotere in modo molto grave sulla soluzione ottenuta invertendo la trasformata di Radon. Questo rende il processo di inversione completamente inaffidabile.

2.2 Prospezione geologica

Il problema della prospezione geologica è quello di determinare la posizione, la forma e certi parametri fisici (come ad esempio la conducibilità) di anomalie all'interno della terra effettuando misure del campo gravitazionale sulla superficie terrestre.

Consideriamo una versione semplificata e 1-dimensionale del problema.

Si vuole determinare la densità $\rho(x')$ di una regione anomala ($0 \leq x' \leq 1$) situata alla profondità h , misurando la componente verticale $f_v(x)$ della variazione della forza gravitazionale nel punto x sulla superficie terrestre.



La massa dell'elemento di volume situato nel punto $(x', -h)$ è data da $\rho(x')\Delta x'$. Se lo strumento è posizionato nel punto $(x, 0)$, la sua distanza dall'elemento di massa è $\sqrt{(x-x')^2 + h^2}$. Dalla legge di Newton

$$F = \gamma \frac{m}{r^2},$$

dove γ indica la costante di gravitazione universale. Indicando con θ l'angolo tra la verticale e la retta che congiunge $(x', -h)$ con $(x, 0)$, si ha

$$\Delta f_v(x) = \gamma \frac{\rho(x')\Delta x'}{(x-x')^2 + h^2} \cos \theta = \gamma \frac{h\rho(x')\Delta x'}{[(x-x')^2 + h^2]^{3/2}}.$$

Sommando i contributi di tutti i punti $x' \in [0, 1]$ si ha

$$f_v(x) = \gamma h \int_0^1 \frac{\rho(x')}{[(x-x')^2 + h^2]^{3/2}} dx', \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5)$$

Osserviamo che la (5) è una equazione integrale di Fredholm del primo tipo.

2.3 Tomografia ad impedenza elettrica

La Tomografia ad Impedenza Elettrica (EIT) è una tecnica diagnostica non invasiva il cui scopo è quello di determinare una mappa della conducibilità elettrica di un corpo, effettuando misure di potenziali e correnti sul bordo del corpo.

La conducibilità elettrica misura quanto il materiale si lascia attraversare dalla corrente elettrica. Materiali diversi hanno conducibilità a volte molto diverse, quindi una mappa della conducibilità può dare informazioni sulla struttura interna del corpo in esame.

La Tomografia ad impedenza elettrica ha applicazioni mediche (monitoraggio delle funzioni cardiache e polmonari, diagnosi di tumori), archeologiche (rilevamento di strutture sotterranee), industriali (controllo sulla qualità della produzione) e 'militari' (localizzazione di mine antiuomo).

L'esperimento si descrive in questo modo: Se Ω è il conduttore da analizzare, si assegna su $\partial\Omega$ una differenza di potenziale f e si misura la corrente sul bordo.

Il modello matematico che regola questo esperimento è il seguente: $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ($N = 2, 3$) è un dominio limitato con frontiera regolare. Il parametro incognito è una funzione $\gamma(x) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^+$ tale che $\gamma \in L^\infty(\Omega)$.

La corrente in Ω è data dalla *legge di Ohm*

$$j = \gamma \nabla u$$

e, se non ci sono sorgenti o pozzi di corrente, il potenziale elettrico u soddisfa l'equazione

$$L_\gamma u := \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Esperimento:

1. Si assegna una funzione f su $\partial\Omega$.
2. Si considera la soluzione u del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Si misura

$$g = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove ν è la normale uscente da $\partial\Omega$.

f e g sono i dati al bordo e appartengono a spazi di Sobolev frazionari.

Il problema inverso:

Ricostruire γ da un certo numero di dati, cioè di coppie

$$\left(u|_{\partial\Omega}, \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} \right) = (f, g).$$

Se supponiamo di avere a disposizione tutte le possibili misure, significa che conosciamo la mappa che ad un qualunque dato f associa il corrispondente dato g . Tale applicazione viene detta *Mappa Dirichlet-Neumann*

$$\Lambda_\gamma : u|_{\partial\Omega} \rightarrow \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}.$$

Il problema inverso consiste quindi nel trovare γ conoscendo Λ_γ . Osserviamo che Λ_γ è una applicazione lineare (per γ fissato), ma il funzionale da invertire

$$\gamma \rightarrow \Lambda_\gamma$$

non lo è. Il primo problema che si affronta è quello dell'unicità, cioè ci chiediamo se la mappa Dirichlet-Neumann è sufficiente per ricostruire γ .

2.3.1 Il caso unidimensionale

In dimensione 1 prendiamo $\Omega = [0, 1] \subset \mathbf{R}$.

L'equazione differenziale diventa

$$(\gamma(x)u'(x))' = 0 \quad \text{in } [0, 1],$$

e i dati sono

$$\begin{aligned} f_0 = u(0) \quad \text{e} \quad f_1 = u(1) \quad \text{assegnati} \\ g_0 = \gamma(0)u'(0) \quad \text{e} \quad g_1 = \gamma(1)u'(1) \quad \text{misurati.} \end{aligned}$$

Dall'equazione segue che $\gamma(x)u'(x)$ è costante, quindi $g_0 = g_1$ e

$$\gamma(x)u'(x) = g_0$$

cioè

$$u(x) = f_0 + g_0 \int_0^x \frac{1}{\gamma(t)} dt$$

e, sostituendo $x = 1$ si ha

$$g_0 = g_1 = \Lambda_\gamma(f_0, f_1) = \frac{f_1 - f_0}{\int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} dt},$$

Da cui si deduce che qualunque esperimento permette solo di conoscere la media integrale della conducibilità γ .