CdL in Matematica a.a. 2013/2014

CALCOLO delle VARIAZIONI

Dott. M. Focardi

Il corso ha una durata di 72 ore(=9 CFU), le lezioni sono previste dal 4 marzo al 13 giugno 2014 nei giorni di

- martedì dalle 15:30 alle 17:30 in aula 5,
- giovedì dalle 10:30 alle 12:30 in aula 8,
- venerdì dalle 13:30 alle 15:30 in aula 5.

Il corso è principalmente rivolto a studenti della laurea magistrale in Matematica.
È <u>necessaria</u> la conoscenza della teoria della misura di Lebesgue e degli spazi L^p; è inoltre <u>consigliata</u> la conoscenza di vari argomenti di analisi funzionale come gli spazi di Hilbert, il teorema di Ascoli-Arzelà, le topologie deboli, la teoria spettrale degli operatori compatti. Di tali argomenti saranno comunque fatti brevi richiami durante le lezioni quando necessario.

La prova d'esame consiste nel superamento di una verifica orale da concordare con il docente.

Programma indicativo (suscettibile di cambiamento durante il corso):

1. Il Calcolo delle Variazioni: introduzione e motivazioni tramite esempi.

2. Richiami di analisi reale: funzione massimale, stima debole, teorema massimale di Hardy-Littlewood, punti di Lebesgue di funzioni sommabili, convoluzioni, Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni (vari enunciati).

3. *Il Metodo Indiretto del Calcolo delle Variazioni* (vedi [3]).

   (a) Estremali di Lagrangiane, nozione di variazione prima (esterna), minimalità in senso debole e in senso forte.

   (b) Condizioni necessarie del primo ordine: equazione ed operatore di Euler-Lagrange, esempi.

   (c) Non esistenza e regolarità di minimi: discussione di vari esempi.

   (d) Condizioni del secondo ordine: nozione di variazione seconda, di integrale accessorio e di Lagrangiana accessoria.
   Condizione necessarie: condizione di Legendre-Hadamard per i minimi deboli, funzione d'eccesso di Weierstrass, condizione necessaria di Weierstrass per i minimi forti.
   Condizioni sufficienti: convessità, teoria di Jacobi per i minimi deboli.

4. *Il Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni* (vedi [1], [4]).

(a) Motivazioni. Teorema di Weierstrass: semicontinuità e compattezza, rilassamento, esempi.

(b) Formulazione debole di problemi variazionali. Spazi di Sobolev $W^{1,p}$, $p \in [1,\infty]$ (vedi [2], [4], [5]): nozione di derivata debole e sua unicità.
Esempi: discussione di esempi particolari, caso unidimensionale, confronto fra $W^{1,\infty}$ e le funzioni Lipschitziane, teorema di Rademacher.
Teorema di Meyers-Serrin e sue conseguenze: regola della catena, troncamento, località della derivata debole, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Risultati di immersione: teorema di Morrey, teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, teorema di immersione per $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$.
Risultati di estensione e approssimazione di funzioni $W^{1,p}$ su aperti Lipschitziani mediante la composizione con mappe bi-Lipschitz.
Teorema di Rellich-Kondrakov, disuguaglianze di Poincarè e di Sobolev-Poincarè. Teoria delle tracce (cenni).

(c) Condizioni necessarie e sufficienti per la semicontinuità forte in L^1 nel caso scalare: approssimazione di funzioni affini con funzioni Lipschitz che prendono due gradienti, disuguaglianza di Jensen, convessità e teorema di Serrin nel caso autonomo.

(d) Condizioni necessarie per la semicontinuità debole in $W^{1,p}$ nel caso vettoriale: Lemma di Riemann-Lebesgue, disuguaglianza tipo Jensen per funzioni a gradiente perodico sul cubo unitario, nozione di quasiconvessità, relazioni della quasiconvessità con la convessità, la policonvessità e la rango-uno convessità, esempi e controesempi.

(e) Condizioni sufficienti per la semicontinuità debole nel caso vettoriale:
Teorema di Morrey in $W^{1,\infty}$.
Teorema di Acerbi & Fusco - Marcellini in $W^{1,p}$, $p \in [1,\infty)$: biting Lemma ed equi-integrabilità, lemma di Mac Shane, lemma di decomposizione, approssimazione di funzioni $W^{1,p}$ con funzioni Lipschitz.

(f) Soluzione del IX^o Problema di Hilbert: Esistenza ed unicità di problemi di minimo mediante il Metodo Diretto, equazione di Euler-Lagrange in forma debole. Regolarità ellittica interna per minimi di Lagrangiane C^2: metodo dei rapporti incrementali, regolarità $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}$ per minimi di funzionali C^1, teorema di Morrey, teorema di Schauder, teorema di De Giorgi.

I testi consultati per la preparazione del corso sono elencati nella bibliografia seguente.

Riferimenti bibliografici

[1] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations.* Second edition. Applied Mathematical Sciences, **78**. Springer, New York, 2008. xii+619 pp.

[2] L.C. Evans, R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. viii+268 pp.

[3] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of variations. I. The Lagrangian formalism.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **310**. Springer-Verlag, Berlin, 1996. xxx+474 pp.

[4] E. Giusti, *Direct methods in the calculus of variations.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003. viii+403 pp.

[5] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces.* Graduate Studies in Mathematics, **105**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. xvi+607 pp.