CORSO di LAUREA in FISICA
PROGRAMMA del CORSO di
COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA (3 CFU)
A.A. 2006/2007

Matteo Focardi

La prova d'esame consiste nel superamento di una verifica orale. Dei risultati indicati in corsivo è stata data una dimostrazione a lezione.

1. **TEORIA della MISURA e dell'INTEGRAZIONE ASTRATTA**: Introduzione e Motivazioni. Misura Esterna di Lebesgue: Definizione, Insiemi Misurabili, *Misurabilità degli Aperti*, Proprietà della Classe dei Misurabili secondo Lebesgue.
   Misure Esterne: Definizione, Insiemi Misurabili, Proprietà della Classe dei μ-Misurabili, σ-algebre. Misure di Borel e di Radon. Approssimazione con Aperti e con Chiusi per le Misure Borel Regolari. Metodo I & II per la Costruzione di Misure: *la Misura Prodotto*, cenni alla Misura di Hausdorff.
   Funzioni μ-Misurabili: *proprietà*. Definizione di Integrale di una Funzione μ-Misurabile, Proprietà dell'Integrale, *l'Integrale come Misura, Disuguaglianza di Chebyschev e sue conseguenze,* Lemma di Approssimazione con Funzioni μ-Semplici.
   Teorema di Beppo-Levi, Scambio fra integrale e serie per successioni di funzioni non negative, σ additivitá della misura prodotto, Lemma di Fatou, Teorema di Lebesgue della Convergenza Dominata, Teorema sulle Serie Assolutamente Convergenti.
   Interpretazione dell'Integrale di una funzione positiva come Area del Sottografico, Formula di Cavalieri, Teorema di Fubini, Equivalenza della misurabilità di una funzione positiva e del suo sottografico, Formule di Riduzione.
   Confronto fra gli integrali di Riemann e di Lebesgue: *Continuità quasi ovunque delle funzioni Riemann integrabili*, Esempi di funzioni integrabili in senso improprio ma non secondo Lebesgue.

   Per questo argomento ho seguito abbastanza fedelmente `cap.II[5], cap.V[6]`. Altro materiale lo trovate in `Appendice[1], Appendice E[2], cap.1[3]`.

2. **SPAZI** $L^p(\Omega,\mu)$: Definizione, *Disuguaglianza di Hölder, Immersioni fra Spazi L^p, Disuguaglianza di Minkowski, Teorema di Completezza, la Convergenza Forte implica quella μ q.o. su Ω per sottosuccessioni.*
   Il caso $\mu = \mathcal{L}^n$: *Densità delle funzioni $C_c(\Omega)$* e Separabilità per $p \in [1,+\infty)$.
   Operatori Lineari Limitati, Spazio Duale, Teorema di Riesz-Fisher.

   Il materiale relativo a questo argomento lo trovate in `cap.4[1], cap.I[6]`.

3. **SPAZI di HILBERT**: Definizione, Esempi, *Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, Continuità del Prodotto Scalare, Identità del Parallelogramma*, Sistemi Ortonor-

mali (s.o.n.), *Proiezione su un sottospazio di dimensione finita generato da vettori di un s.o.n., Disuguaglianza di Bessel.*
Sistemi Ortonormali Completi (s.o.n.c.): Definizione, *Caratterizzazioni Equivalenti, Identità di Parceval*, Esistenza di s.o.n.c., Caratterizzazione degli spazi di Hilbert con s.o.n.c. al più numerabili, *Isometria di uno Spazio di Hilbert separabile reale con $l^2(\mathbf{R})$.*
Teorema di Proiezione su un Convesso Chiuso, Caso del Sottospazio, Teorema di Rappresentazione di Riesz.
Forme Bilineari: *Caratterizzazione delle forme bilineari continue, Principio di Dirichlet Astratto, Teorema di Riesz per forme bilineari continue, simmetriche e coercive, Metodo di Ritz.*
Operatore Aggiunto: Definizione, *Esistenza ed Unicità, Teorema di Lax-Milgram, Metodo di Faedo-Galerkin.*

Per questo argomento ho consultato `cap.5[1], cap.X[4], cap.6[7].`

4. **SPAZI di SOBOLEV**: Motivazioni, Definizione di derivata debole e di $W^{1,p}(\Omega)$, Esempi, *Caratterizzazione di $W^{1,p}$ nel caso Unidimensionale*, *Teorema di Completezza e Separabilità*, Teorema di Meyers-Serrin, Definizione di aperto di classe C^1 e lipschitziano, Teorema di approssimazione con funzioni $C^1(\overline{\Omega})$, Tracce di funzioni $W^{1,p}$, *Teorema di traccia per $\Omega = \mathbf{R}^n_+$*, Definizione di $W^{1,p}_o(\Omega)$, Caratterizzazione di $W^{1,p}_o(\Omega)$ mediante le tracce, Esempi, *Disuguaglianza di Poincaré*, Caratterizzazione del duale di $W^{1,p}_o(\Omega)$.

   Per questo argomento ho consultato pricncipalmente `cap.8[7]`, in parte anche i seguenti `cap.7,8[1], cap.5[2], cap.4[3], cap.I[6].`

5. **METODI VARIAZIONALI**: Introduzione, Problemi di Dirichlet e di Neumann omogeneo/non omogeneo nel caso unidimensionale.
   Metodi variazionali per la soluzione di P.D.E.: Operatori ellittici in forma di divergenza, *Problema di Dirichlet, Forme bilineari debolmente coercive, Operatori compatti*, Alternativa di Riesz-Fredholm, Teoria spettrale per gli operatori compatti, *Chain Rule in $W^{1,p}$ per funzioni $f \in C^1(\mathbf{R})$ con $f' \in L^\infty(\mathbf{R})$ e per $f(t) = |t|$ o t^+ o t^-, Principio di massimo, Problema di Neumann.*

   Per questo argomento ho consultato principalmente `cap.9[7]`, in parte anche i seguenti `cap.6,7,8[1], cap.6[2], cap.I[6].`

Riferimenti bibliografici

[1] H. Brezis, *Analisi Funzionale*, Liguori Editore, Napoli, 1990.

[2] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[3] L.C. Evans - R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992

[4] M. Giaquinta - G. Modica, *Analisi Matematica: strutture lineari e metriche continuità* (vol. 3), Pitagora Editrice, Bologna, 2000.

[5] M. Giaquinta - G. Modica, *Analisi Matematica: funzioni di più variabili* (vol. 4), Pitagora Editrice, Bologna, 2005.

[6] M. Giaquinta - G. Modica, *Funzioni di più variabili: ulteriori sviluppi* (vol. 5), Pitagora Editrice, Bologna, 2005.

[7] S. Salsa, *Equazioni a derivate parziali*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2004.