

CORSO di LAUREA in FISICA
PROGRAMMA del CORSO di
COMPLEMENTI di ANALISI MATEMATICA (3 CFU)

A.A. 2005/2006

Matteo Focardi

La prova d'esame consiste nel superamento di una verifica orale. Dei risultati indicati in corsivo è stata data una dimostrazione a lezione.

- 1. TEORIA della MISURA e dell'INTEGRAZIONE ASTRATTA:** Introduzione e Motivazioni. Misura Esterna di Lebesgue: Definizione, Insiemi Misurabili, *Misurabilità degli Aperti*, Proprietà della Classe dei Misurabili secondo Lebesgue.
Misure Esterne: Definizione, Insiemi Misurabili, Proprietà della Classe dei μ -Misurabili, σ -algebre. Misure di Borel e di Radon. Approssimazione con Aperti e con Chiusi per le Misure Borel Regolari. Metodo I & II per la Costruzione di Misure: esempi.
Funzioni μ -Misurabili: *proprietà*. Definizione di Integrale di una Funzione μ -Misurabile. Proprietà dell'Integrale, *Lemma di Approssimazione con Funzioni μ -Semplici*, *interpretazione dell'Integrale di una funzione positiva come l'Area del Sottografico*, *Formula di Cavalieri*. *Disuguaglianza di Chebyshev e sue conseguenze*. *Teorema di Beppo-Levi*, *Lemma di Fatou*, *Teorema di Lebesgue della Convergenza Dominata*, Teorema sulle Serie Assolutamente Convergenti.
Confronto fra gli integrali di Riemann e di Lebesgue: *continuità quasi ovunque delle funzioni Riemann integrabili, esempi di funzioni integrabili in senso improprio ma non secondo Lebesgue*. *Insiemi di tipo Cantor: costruzione e varie proprietà*.
Teorema di Fubini, *equivalenza della misurabilità di una funzione positiva e del suo sottografico*, Formule di Riduzione.
- 2. SPAZI $L^p(\Omega, \mu)$:** Definizione, *Disuguaglianza di Hölder*, *Immersioni fra Spazi L^p* , *Disuguaglianza di Minkowski*, *Teorema di Completezza*, *la Convergenza Forte implica quella μ q.o. su Ω per sottosuccessioni*.
Densità delle funzioni $C_c(\Omega)$ e Separabilità se $p \in [1, +\infty)$, controesempi per $L^\infty(\Omega)$.
Operatori Lineari Limitati, Spazio Duale, Teorema di Riesz-Fisher.
- 3. SPAZI di HILBERT:** Definizione, Esempi, *Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz*, *Continuità del Prodotto Scalare*, *Identità del Parallelogramma*, Sistemi Ortonormali (s.o.n.). *Proiezione su un sottospazio di dimensione finita generato da vettori di un s.o.n.*, *Disuguaglianza di Bessel*.
Sistemi Ortonormali Completi (s.o.n.c.): Definizione, *Caratterizzazioni Equivalenti*, *Identità di Parseval*, Esistenza di s.o.n.c., *Caratterizzazione degli spazi di*

Hilbert con s.o.n.c. al più numerabili, Isometria di uno Spazio di Hilbert separabile reale con $l^2(\mathbf{R})$.

Teorema di Proiezione su un Convesso Chiuso, Caso del Sottospazio, Teorema di Rappresentazione di Riesz.

Forme Bilineari: Caratterizzazione delle forme bilineari continue, Principio di Dirichlet Astratto, Teorema di Riesz per forme bilineari continue, simmetriche e coercive. Operatore Aggiunto: Definizione, Esistenza ed Unicità, Teorema di Lax-Milgram.

- 4. SPAZI di SOBOLEV:** Definizione di $W^{1,p}(\Omega)$, Derivata Debole, Esempi, Teorema di Completezza e Separabilità, Teorema di Meyers-Serrin, Definizione di $W_o^{1,p}(\Omega)$, Esempi, Disuguaglianza di Poincaré, Caratterizzazione del Duale di $W_o^{1,p}(\Omega)$.
- 5. METODI VARIAZIONALI:** Introduzione, Problema di Dirichlet Omogeneo, Problema di Neumann Omogeneo.

Testi di riferimento:

- a.** H. Brezis, *Analisi Funzionale*, Liguori Editore, Napoli, 1990.
- b.** L.C. Evans - R. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992
- c.** M. Giaquinta - G. Modica, *Funzioni di più variabili*, Pitagora Editrice, Bologna, 2005.
- d.** M. Giaquinta - G. Modica, *Funzioni di più variabili: ulteriori sviluppi*, Pitagora Editrice, Bologna, 2005.