CdL in BIOTECNOLOGIE

ELEMENTI di MATEMATICA e STATISTICA a.a. 2015/2016 - Corso B (lettere N-Z)

Prova di Esame [1]

Cognome e Nome: *Matricola:*

1. (2 punti (a), 3 punti (b)) Determinare il valore dei seguenti limiti

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+x^2+x+1)}{\ln(x^2+x+1)\ln x}$, (b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\ln^2(1+x)}\right)\left(\frac{1}{e^x}-1\right)$.

(a) Da $\ln(x^3+x^2+x+1) = 3\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$
$\ln(x^2+x+1) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

segue:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+x^2+x+1)}{\ln(x^2+x+1)\cdot\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{2\ln^2 x+\ln x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

(b) Dal limite notevole $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t\to 0} 1$ e poiché $\frac{e^t-1}{t} \xrightarrow{t\to 0} 1$ segue

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\ln^2(1+x)}\right)\left(\frac{1}{e^x}-1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln^2(1+x)-x^2}{x^4}\right)\cdot(1-e^x) =$$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\ln^2(1+x)}{x^3}$. Applicando il teorema di de L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0} \frac{2x-2\frac{\ln(1+x)}{1+x}}{3x^2} = \frac{2}{3}+\lim_{x\to 0}\frac{2(x-\ln(1+x))}{3x^2}$, riapplicandolo si trova che il limite cercato è uguale a 1

2. (4 punti) Determinare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\cos x}{3\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx.$$

Sostituendo $t = \sin x$, l'integrale indefinito diventa:

$$\int \frac{1}{3(1-t^2)-t^2}\,dt = \int \frac{1}{3-4t^2}\,dt$$

Da $\frac{1}{3-4t^2} = \frac{A}{\sqrt{3}-2t}+\frac{B}{\sqrt{3}+2t} \iff A=B=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

segue:

$$\int\frac{1}{3-4t^2}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\int\frac{1}{\sqrt{3}-2t}\,dt+\int\frac{1}{\sqrt{3}+2t}\,dt\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2t+\sqrt{3}}{2t-\sqrt{3}}\right|+c \quad \forall c\in\mathbb{R}$$

Quindi l'integrale cercato è: $\int\frac{\cos x}{3\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2\sin x+\sqrt{3}}{2\sin x-\sqrt{3}}\right|+c$

[1] Scrivere la risposta nello spazio sottostante alla domanda corrispondente giustificando i passaggi significativi. Non riportare calcoli di brutta. Riconsegnare solo i presenti due fogli, non allegarne altri. Totale punti 30, punteggio minimo per il superamento della prova scritta 18.

3. (4 punti) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^4 - 10x^2 + 16 \ln x + 9 = y.$$

Sia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 - 10x^2 + 16\ln x + 9$, f è derivabile su $(0,+\infty)$ e $\lim_{x\to 0^+} f = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$. Essendo f continua su $(0,+\infty)$ allora $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, quindi $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in (0,+\infty)$ t.c. $f(x) = y$. Per determinare il numero di soluzioni si studia la monotonia di f:

$f'(x) = 4x^3 - 20x + \frac{16}{x} = \frac{4}{x}(x^4 - 5x^2 + 4) > 0 \iff x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

L'equazione $t^2 - 5t + 4 = 0$ ha radici $t_1 = \frac{5-3}{2} = 1$, $t_2 = \frac{5+3}{2} = 4$

quindi: $x^4 - 5x^2 + 4 > 0 \iff 0 \leq x^2 < 1,\ x^2 > 4 \iff x \in [0,1) \cup (2,+\infty)$

da cui: $x_1 = 1$ punto di massimo relativo, $x_2 = 2$ minimo relativo.

Da $f(1) = 0 > f(2) = 16\ln 2 - 15$ segue:

$$f(x) = y \text{ ha } \begin{cases} \text{una soluzione } y \in (-\infty, f(2)) \cup (f(1), +\infty) \\ \text{due soluzioni } y \in \{f(2), f(1)\} \\ \text{tre soluzioni } y \in (f(2), f(1)) \end{cases}$$

4. (5 punti) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$3y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{\ln x}{\ln^2 y}.$$

L'equazione è a variabili separabili. Si noti che ogni soluzione è strettamente positiva (affinché abbia senso $\ln y$)

Separando le variabili e integrando in x:

$$3\int \frac{y'}{y} \cdot \ln^2 y \, dx = \int \frac{\ln x}{x} dx \iff \left(3\int \frac{\ln^2 y}{y} dy\right)_{y=y(x)} = \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\iff \ln^3(y(x)) = \frac{1}{2}\ln^2 x + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\iff \ln y(x) = \left(\frac{1}{2}\ln^2 x + c\right)^{1/3} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\iff y(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln^2 x + c\right)^{1/3} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$