CdL in BIOTECNOLOGIE

Matematica (corso B) a.a. 2010/2011

Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie

23 dicembre 2010

Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

- $y' = 2x + \sin x \cos x,\ y' = 2y + 2x,\ y' = -2y + 2x,\ y' = -\frac{y}{x} + e^{x^2},$
- $y' = y - \sqrt{y},\ y' = 4xy + x\sqrt{y},\ y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{y},\ y' = \frac{y}{x} - y^4 \frac{\sin x}{x^3};$
- $y' = \frac{y^2+1}{y} \arctan x,\ y' = \frac{y}{x \ln y},\ y' = \frac{e^y + e^{-y}}{e^x - e^{-x}};$
- $y' = \frac{y^2+1}{y} \frac{x+3}{2x},\ y' = \frac{\sqrt{y^4+1}}{y^3} \frac{x}{1+x^2},\ y' = \frac{\ln(\ln^2 x - 1)}{x} \tan y;$

Determinare tutte le soluzioni delle equazioni seguenti. Inoltre, verificare che le soluzioni dei problemi di Cauchy con le condizioni iniziali indicate sono le funzioni scritte a lato negli intervalli indicati.

- $y' = \frac{y}{x} + x$, (soluzioni: $y(x) = x(c+x)$ con $c \in \mathbb{R}$).
  $y(1) = 0 \Rightarrow y(x) = x(x-1)$ su $(0, +\infty)$,
  $y(-1) = 0 \Rightarrow y(x) = x(x+1)$ su $(-\infty, 0)$,
  $y(1) = 3 \Rightarrow y(x) = x(x+2)$ su $(0, +\infty)$,
  $y(-1) = -1 \Rightarrow y(x) = x(x+2)$ su $(-\infty, 0)$.
- $y' = -\frac{y}{x} + \frac{2}{x}$, (soluzioni: $y(x) = 2 + \frac{c}{x}$ con $c \in \mathbb{R}$).
  $y(1) = 0 \Rightarrow y(x) = 2 - \frac{2}{x}$ su $(0, +\infty)$,
  $y(-1) = 0 \Rightarrow y(x) = 2 + \frac{2}{x}$ su $(-\infty, 0)$,
  $y(-1) = 4 \Rightarrow y(x) = 2 - \frac{2}{x}$ su $(-\infty, 0)$,
  $y(1) = 4 \Rightarrow y(x) = 2 + \frac{2}{x}$ su $(0, +\infty)$.
- $y' = xy - xy^3$, (soluzioni: $y(x) = 0$, $y(x) = 1$, $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + c\, e^{-x^2}}}$ con $c \in \mathbb{R}$).
  $y(0) = 1 \Rightarrow y(x) = 1$ su $\mathbb{R}$, $y(-7) = 1 \Rightarrow y(x) = 1$ su $\mathbb{R}$,
  $y(1) = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ su $\mathbb{R}$, $y(7) = 1 \Rightarrow y(x) = 0$ su $\mathbb{R}$,
  $y(0) = 1/2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\, e^{-x^2}}}$ su $\mathbb{R}$,

$$y(0)=2 \Rightarrow y(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}e^{-x^2}}} \text{ su } \mathbb{R},$$
$$y(\sqrt{\ln 2})=\sqrt{2} \Rightarrow y(x)=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \text{ su } (0,+\infty),$$
$$y(-\sqrt{\ln 4})=2/\sqrt{3} \Rightarrow y(x)=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \text{ su } (-\infty,0).$$

- $y'=x(y^2-1)$, (soluzioni: $y(x)=1$, $y(x)=-1$, $y(x)=\dfrac{1+c\,e^{x^2}}{1-c\,e^{x^2}}$ con $c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$).
$$y(0)=1 \Rightarrow y(x)=1 \text{ su } \mathbb{R},\ y(0)=-1 \Rightarrow y(x)=-1 \text{ su } \mathbb{R},$$
$$y(0)=0 \Rightarrow y(x)=\frac{1-e^{x^2}}{1+e^{x^2}} \text{ su } \mathbb{R},\ y(0)=-2 \Rightarrow y(x)=\frac{1+3e^{x^2}}{1-3e^{x^2}} \text{ su } \mathbb{R},$$
$$y(0)=2 \Rightarrow y(x)=\frac{3+e^{x^2}}{3-e^{x^2}} \text{ su } (-\sqrt{\ln 3},\sqrt{\ln 3}),$$
$$y(1)=2 \Rightarrow y(x)=\frac{3+e^{x^2-1}}{3-e^{x^2-1}} \text{ su } (-\sqrt{1+\ln 3},\sqrt{1+\ln 3}).$$

- $y'=\dfrac{y^3+1}{y^2}\tan x$, (soluzioni: $y(x)=\sqrt[3]{\dfrac{c}{\cos^3 x}-1}$ con $c\in\mathbb{R}$).
$$y(0)=-1 \Rightarrow y(x)=-1 \text{ su } \mathbb{R},\ y(\pm 9)=-1 \Rightarrow y(x)=-1 \text{ su } \mathbb{R},$$
$$y(0)=2 \Rightarrow y(x)=\sqrt[3]{\frac{9}{\cos^3 x}-1} \text{ su } (-\pi/2,\pi/2),$$
$$y(-\pi)=2 \Rightarrow y(x)=-\sqrt[3]{\frac{9}{\cos^3 x}+1} \text{ su } (-3\pi/2,-\pi/2),$$
$$y(0)=-2 \Rightarrow y(x)=-\sqrt[3]{\frac{7}{\cos^3 x}+1} \text{ su } (-\pi/2,\pi/2),$$
$$y(-\pi)=-2 \Rightarrow y(x)=\sqrt[3]{\frac{7}{\cos^3 x}-1} \text{ su } (-3\pi/2,-\pi/2),$$