CdL in BIOTECNOLOGIE

Matematica (corso B) a.a. 2010/2011

Esercizi sui metodi di integrazione[1]

16 dicembre 2010

Utilizzando la regola di integrazione per parti verificare che

- $\displaystyle\int x\ln|x|\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\right) + c,\ \int \ln^2|x|\,dx = x\left(\ln^2|x| - 2\ln|x| + 2\right) + c;$
- $\displaystyle\int x^2\ln|x|\,dx = \frac{x^3}{3}\left(\ln|x| - \frac{1}{3}\right) + c,\ \int x^2\ln^2|x|\,dx = \frac{x^3}{3}\left(\ln^2|x| - \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{2}{9}\right) + c;$
- $\displaystyle\int xe^x\,dx = e^x(x-1) + c,\ \int x^2e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c;$
- $\displaystyle\int xe^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1) + c,\ \int (x^2 + x + 1)e^x\,dx = e^x(x^2 - x + 2) + c;$
- $\displaystyle\int \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx = -\frac{\ln|x| + 1}{x} + c,\ \int \frac{\ln|x|}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}(\ln|x| - 2) + c;$
- $\displaystyle\int x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c,$
- $\displaystyle\int (x+3)\sin x\,dx = \sin x - (3 + x)\cos x + c,\ \int x^2\cos x\,dx = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + c;$
- $\displaystyle\int \cos x\sin x\,dx = -\cos^2 x + c;\ \int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c;$
- $\displaystyle\int x\,e^x\sin x\,dx = \frac{xe^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2}\cos x + c;$

Utilizzando la regola di integrazione per sostituzione verificare che

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 16}\,dx = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right) + c,\ \int \frac{x^3}{x^8 + 1}\,dx = \frac{1}{4}\arctan(x^4) + c;$
- $\displaystyle\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 + c,\ \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + c;$
- $\displaystyle\int (e^x + 1)^3e^x\,dx = \frac{(e^x + 1)^4}{4} + c;\ \int (1 + \ln^2|x|)\frac{\ln|x|}{x}\,dx = \frac{\ln^4|x|}{4} + \frac{\ln^2|x|}{2} + c;$
- $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c,\ \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}\,dx = 2\sqrt{1 + \sin x} + c;$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + c,\ \int \frac{\sqrt{\ln|x|}}{x}\,dx = \frac{2}{3}(\ln|x|)^{3/2} + c,$
- $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + c,\ \int \left(x\,e^{x^2} + x^2e^{x^3}\right)\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{3}e^{x^3} + c.$

[1] nel seguito c indicherà una generica costante reale.

Utilizzando la regola di integrazione per parti e quella di integrazione per sostituzione verificare che

- $\displaystyle\int \sin x \ln(\cos x)\, dx = \cos x(1 - \ln(\cos x)) + c,$
- $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin x \cos x\, dx = e^{\cos x}(1 - \cos x) + c;$

Verificare che i seguenti integrali indefiniti di funzioni razionali sono corretti.

- $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+4x+2}dx = -\frac{1}{2(x+1)} + c, \int \frac{2}{3x^2+18x+27}dx = -\frac{2}{3(x+3)} + c;$
- $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+4x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c, \int \frac{3}{2x^2+3x+1}dx = 6\ln\left|\frac{x+1/2}{x+1}\right| + c;$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}dx = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c, \int \frac{1}{x^2+6x+12}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + c;$
- $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) + \arctan x + c, \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx = 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c;$
- $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx = \ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + c;$
- $\displaystyle\int \frac{x+3}{3x^2+1}dx = \frac{1}{6}\ln(3x^2+1) + \sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}x) + c,$
- $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}dx = x - \arctan(x+1) + c;$
- $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x}{x^2+1}dx = 2x + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - 2\arctan x + c.$

Determinare i seguenti integrali indefiniti di funzioni trigonometriche.

- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx, \int \left(\cos x + \frac{1}{\sin x}\right) dx, \int \tan x\, dx, \int \frac{1}{\tan x}\, dx;$
- $\displaystyle\int \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) dx, \int \frac{1+\tan^2(x/2)}{\cos x + \sin x}\, dx.$

Utilizzando sostituzioni razionalizzanti determinare i seguenti integrali indefiniti

- $\displaystyle\int \frac{1}{x(2+\cos(\ln x))}\, dx, \int \frac{e^x}{4+\sin(e^x)}\, dx, \int \frac{x^2}{(1+\tan^2(x^3))}\, dx;$
- $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+3}\, dx, \int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx, \int \frac{1}{e^{2x}+8}\, dx;$
- $\displaystyle\int \frac{\ln|x|}{x(\ln^2|x| + 2\ln|x| - 1)}\, dx, \int \frac{\sin x \cos x}{(\sin^2 x + \sin x + 4)}\, dx.$