CdL in BIOLOGIA

Matematica (corso B)

Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie

Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali.

- $y' = 2x + \sin x \cos x,\ y' = 2y + 2x,\ y' = -2y + 2x,\ y' = -\dfrac{y}{x} + e^{x^2},$
- $y' = y - \sqrt{y},\ y' = 4xy + x\sqrt{y},\ y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{y},\ y' = \dfrac{y}{x} - y^4\dfrac{\sin x}{x^3};$
- $y' = \dfrac{y^2+1}{y}\arctan x,\ y' = \dfrac{y}{x\ln y},\ y' = \dfrac{e^y + e^{-y}}{e^x - e^{-x}};$
- $y' = \dfrac{y^2+1}{y}\dfrac{x+3}{2x},\ y' = \dfrac{\sqrt{y^4+1}}{y^3}\dfrac{x}{1+x^2},\ y' = \dfrac{\ln(\ln^2 x - 1)}{x}\tan y;$

Determinare tutte le soluzioni delle equazioni seguenti. Inoltre, verificare che le soluzioni dei problemi di Cauchy con le condizioni iniziali indicate sono le funzioni scritte a lato negli intervalli indicati.

- $y' = \dfrac{y}{x} + x$, (soluzioni: $y(x) = x(c+x)$ con $c \in \mathbb{R}$).
  $y(1) = 0 \Rightarrow y(x) = x(x-1)$ su $(0, +\infty)$,
  $y(-1) = 0 \Rightarrow y(x) = x(x+1)$ su $(-\infty, 0)$,
  $y(1) = 3 \Rightarrow y(x) = x(x+2)$ su $(0, +\infty)$,
  $y(-1) = -1 \Rightarrow y(x) = x(x+2)$ su $(-\infty, 0)$.
- $y' = -\dfrac{y}{x} + \dfrac{2}{x}$, (soluzioni: $y(x) = 2 + \dfrac{c}{x}$ con $c \in \mathbb{R}$).
  $y(1) = 0 \Rightarrow y(x) = 2 - \dfrac{2}{x}$ su $(0, +\infty)$,
  $y(-1) = 0 \Rightarrow y(x) = 2 + \dfrac{2}{x}$ su $(-\infty, 0)$,
  $y(-1) = 4 \Rightarrow y(x) = 2 - \dfrac{2}{x}$ su $(-\infty, 0)$,
  $y(1) = 4 \Rightarrow y(x) = 2 + \dfrac{2}{x}$ su $(0, +\infty)$.
- $y' = xy - xy^3$, (soluzioni: $y(x) = 0$, $y(x) = 1$, $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + c\,e^{-x^2}}}$ con $c \in \mathbb{R}$).
  $y(0) = 1 \Rightarrow y(x) = 1$ su $\mathbb{R}$, $y(-7) = 1 \Rightarrow y(x) = 1$ su $\mathbb{R}$,
  $y(1) = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ su $\mathbb{R}$, $y(7) = 1 \Rightarrow y(x) = 0$ su $\mathbb{R}$,
  $y(0) = 1/2 \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 3\,e^{-x^2}}}$ su $\mathbb{R}$,
  $y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-x^2}}}$ su $\mathbb{R}$,

$y(\sqrt{\ln 2}) = \sqrt{2} \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ su $(0,+\infty)$,

$y(-\sqrt{\ln 4}) = 2/\sqrt{3} \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ su $(-\infty,0)$.

- $y' = x(y^2-1)$, (soluzioni: $y(x)=1$, $y(x)=-1$, $y(x) = \dfrac{1+c\,e^{x^2}}{1-c\,e^{x^2}}$ con $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$).

  $y(0)=1 \Rightarrow y(x)=1$ su $\mathbb{R}$, $y(0)=-1 \Rightarrow y(x)=-1$ su $\mathbb{R}$,

  $y(0)=0 \Rightarrow y(x) = \dfrac{1-e^{x^2}}{1+e^{x^2}}$ su $\mathbb{R}$, $y(0)=-2 \Rightarrow y(x) = \dfrac{1+3e^{x^2}}{1-3e^{x^2}}$ su $\mathbb{R}$,

  $y(0)=2 \Rightarrow y(x) = \dfrac{3+e^{x^2}}{3-e^{x^2}}$ su $(-\sqrt{\ln 3}, \sqrt{\ln 3})$,

  $y(1)=2 \Rightarrow y(x) = \dfrac{3+e^{x^2-1}}{3-e^{x^2-1}}$ su $(-\sqrt{1+\ln 3}, \sqrt{1+\ln 3})$.

- $y' = \dfrac{y^3+1}{y^2}\tan x$, (soluzioni: $y(x) = \sqrt[3]{\dfrac{c}{\cos^3 x} - 1}$ con $c \in \mathbb{R}$).

  $y(0)=-1 \Rightarrow y(x)=-1$ su $\mathbb{R}$, $y(\pm 9)=-1 \Rightarrow y(x)=-1$ su $\mathbb{R}$,

  $y(0)=2 \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{\dfrac{9}{\cos^3 x} - 1}$ su $(-\pi/2, \pi/2)$,

  $y(-\pi)=2 \Rightarrow y(x) = -\sqrt[3]{\dfrac{9}{\cos^3 x} + 1}$ su $(-3\pi/2, -\pi/2)$,

  $y(0)=-2 \Rightarrow y(x) = -\sqrt[3]{\dfrac{7}{\cos^3 x} + 1}$ su $(-\pi/2, \pi/2)$,

  $y(-\pi)=-2 \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{\dfrac{7}{\cos^3 x} - 1}$ su $(-3\pi/2, -\pi/2)$,