

CdL in BIOLOGIA

Matematica (corso B)

Esercizi sui metodi di integrazione¹

Utilizzando la regola di integrazione per parti verificare che

- $\int x \ln |x| dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln |x| - \frac{1}{2} \right) + c$, $\int \ln^2 |x| dx = x (\ln^2 |x| - 2 \ln |x| + 2) + c$;
- $\int x^2 \ln |x| dx = \frac{x^3}{3} \left(\ln |x| - \frac{1}{3} \right) + c$, $\int x^2 \ln^2 |x| dx = \frac{x^3}{3} \left(\ln^2 |x| - \frac{2}{3} \ln |x| + \frac{2}{9} \right) + c$;
- $\int x e^x dx = e^x (x - 1) + c$, $\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + c$;
- $\int x e^{-x} dx = -e^{-x} (x + 1) + c$, $\int (x^2 + x + 1) e^x dx = e^x (x^2 - x + 2) + c$;
- $\int \frac{\ln |x|}{x^2} dx = -\frac{\ln |x| + 1}{x} + c$, $\int \frac{\ln |x|}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} (\ln |x| - 2) + c$;
- $\int x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$,
- $\int (x + 3) \sin x dx = \sin x - (3 + x) \cos x + c$, $\int x^2 \cos x dx = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + c$;
- $\int \cos x \sin x dx = -\cos^2 x + c$; $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$;
- $\int x e^x \sin x dx = \frac{x e^x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2} \cos x + c$;

Utilizzando la regola di integrazione per sostituzione verificare che

- $\int \frac{1}{x^2 + 16} dx = \frac{1}{4} \arctan \left(\frac{x}{4} \right) + c$, $\int \frac{x^3}{x^8 + 1} dx = \frac{1}{4} \arctan(x^4) + c$;
- $\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^3 + c$, $\int \left(1 + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + c$;
- $\int (e^x + 1)^3 e^x dx = \frac{(e^x + 1)^4}{4} + c$; $\int (1 + \ln^2 |x|) \frac{\ln |x|}{x} dx = \frac{\ln^4 |x|}{4} + \frac{\ln^2 |x|}{2} + c$;
- $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$, $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx = 2\sqrt{1 + \sin x} + c$;
- $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| + c$, $\int \frac{\sqrt{\ln |x|}}{x} dx = \frac{2}{3} (\ln |x|)^{3/2} + c$,
- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$, $\int (x e^{x^2} + x^2 e^{x^3}) dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{3} e^{x^3} + c$.

¹nel seguito c indicherà una generica costante reale.

Utilizzando la regola di integrazione per parti e quella di integrazione per sostituzione verificare che

- $\int \sin x \ln(\cos x) dx = \cos x(1 - \ln(\cos x)) + c,$
- $\int e^{\cos x} \sin x \cos x dx = e^{\cos x}(1 - \cos x) + c;$

Verificare che i seguenti integrali indefiniti di funzioni razionali sono corretti.

- $\int \frac{1}{2x^2 + 4x + 2} dx = -\frac{1}{2(x+1)} + c, \int \frac{2}{3x^2 + 18x + 27} dx = -\frac{2}{3(x+3)} + c;$
- $\int \frac{1}{2x^2 + 4x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c, \int \frac{3}{2x^2 + 3x + 1} dx = 6 \ln \left| \frac{x+1/2}{x+1} \right| + c;$
- $\int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{x}{3} \right) + c, \int \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{x+3}{\sqrt{3}} \right) + c;$
- $\int \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + \arctan x + c, \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx = 2 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c;$
- $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx = \ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + c;$
- $\int \frac{x+3}{3x^2+1} dx = \frac{1}{6} \ln(3x^2+1) + \sqrt{3} \arctan(\sqrt{3}x) + c,$
- $\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} dx = x - \arctan(x+1) + c;$
- $\int \frac{2x^2+3x}{x^2+1} dx = 2x + \frac{3}{2} \ln(x^2+1) - 2 \arctan x + c.$

Determinare i seguenti integrali indefiniti di funzioni trigonometriche.

- $\int \frac{1}{\cos x} dx, \int \left(\cos x + \frac{1}{\sin x} \right) dx, \int \tan x dx, \int \frac{1}{\tan x} dx;$
- $\int \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx, \int \frac{1 + \tan^2(x/2)}{\cos x + \sin x} dx.$

Utilizzando sostituzioni razionalizzanti determinare i seguenti integrali indefiniti

- $\int \frac{1}{x(2 + \cos(\ln x))} dx, \int \frac{e^x}{4 + \sin(e^x)} dx, \int \frac{x^2}{(1 + \tan^2(x^3))} dx;$
- $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 3} dx, \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx, \int \frac{1}{e^{2x} + 8} dx;$
- $\int \frac{\ln|x|}{x(\ln^2|x| + 2\ln|x| - 1)} dx, \int \frac{\sin x \cos x}{(\sin^2 x + \sin x + 4)} dx.$