ESERCIZIO 1: Sia $f:\mathbb{R}^2\setminus\{x=0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ data da (1)

$$f(x,y)=\frac{\cos(x(y+x))-\cos x}{x}$$

e sia $(0,y_0)$ un punto dell'asse delle ordinate.
Dallo sviluppo di Taylor: $\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)\quad t\to 0$
segue:

$$f(x,y)=-\frac{x}{2}(y+x)^2+\frac{x}{2}+o(x^2)\qquad (*)\qquad x\to 0$$

da cui segue
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f=0$$

La funzione
$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

risulta di classe $C^0(\mathbb{R}^2)$. Inoltre, $F\in C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{x=0\})$
e
$$F_y(0,y)=0\quad\forall y\in\mathbb{R}$$

mentre da $(*)$ si deduce che

$$\frac{F(x,y_0)-F(0,y_0)}{x}=\frac{1-(y_0+x)^2}{2}+o(x)\qquad x\to 0$$

da cui $F$ è parzialmente derivabile rispetto $x$ in $(0,y_0)$ e $F_x(0,y_0)=\frac{1-y_0^2}{2}$.

Quindi, $F$ risulta differenziabile in $(0,y_0)$ se e solo se
$$F(x,y)-\cancel{F(0,y_0)}^{\,0}+\frac{y_0^2-1}{2}x=o\left(\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}\right)$$
se $(x,y)\to(0,y_0)$.

Supponendo $x\neq 0$ si ha da $(*)$ che il termine a sinistra della precedente uguaglianza è dato da:

$$-\frac{x}{2}\left((x+y)^2-y_0^2\right)+o(x^2)$$
$$=-\left(\frac{x^3}{2}+x^2y+x\left(\frac{y^2-y_0^2}{2}\right)\right)+o(x^2)=$$

$$= -\left(x^2 y + x\left(y^2 - y_0^2\right)\right) + o(x^2) = o\left(\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}\right)$$

dato che:

$$\frac{|x^2 y|}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}} \leq |xy|$$

$$\frac{|x(y^2 - y_0^2)|}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}} \leq |x||y+y_0|$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}} \leq |x|$$

ESERCIZIO 2: Siano ③

$$S(x) := \sum_{n\geq 1} 2^n \, tg\left(\frac{1}{n!}\right) (atn\, x)^{n!}$$

e

$$H(y) := \sum_{n\geq 1} 2^n \cdot tg\left(\frac{1}{n!}\right) y^{n!}$$

allora $H$ è la somma di una serie di potenze di successione generatrice $a_k$ t.c.
$a_k = 2^n \, tg \frac{1}{n!}$ se $k = n!$ per qualche $n \in \mathbb{N}$,
$a_k = 0$ altrimenti.

Si noti che se $n! \in 2\mathbb{N}$, $n \geq 2$, quindi si può supporre $y \geq 0$. Inoltre, se $y > 1$

$$2^n \, tg\left(\frac{1}{n!}\right) y^{n!} = (1+o(1))\; 2^n \frac{y^{n!}}{n!} \longrightarrow +\infty$$

per il Criterio del Rapporto. Analogamente, tale limite è 0 se $y \in [0,1]$.
Quindi, il raggio di convergenza della serie di potenze che definisce $H$ è 1, da cui $H \in C^\infty((-1,1))$ e per il Teorema di Abel $H \in C^0([-1,1])$.

Poiché $S(x) = H(atn\, x)$ si ha che la serie che definisce $S$ converge totalmente se e solo se $|atn\, x| \leq 1$, da cui $|x| \leq tg 1$.

Inoltre, $S \in C^\infty((-1,1))$ con

$$S(x) = \cancelto{0}{S(0)} + S'(0)x + \frac{S''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= o(x^2) + \left.\frac{H'(atn\, t)}{1+t^2}\right|_{t=0} \cdot x + \left.\left(\frac{H''(atn\, t)}{(1+t^2)^2} - \frac{H'(atn\, t)}{(1+t^2)^2}\cdot 2t\right)\right|_{t=0} \frac{x^2}{2}$$

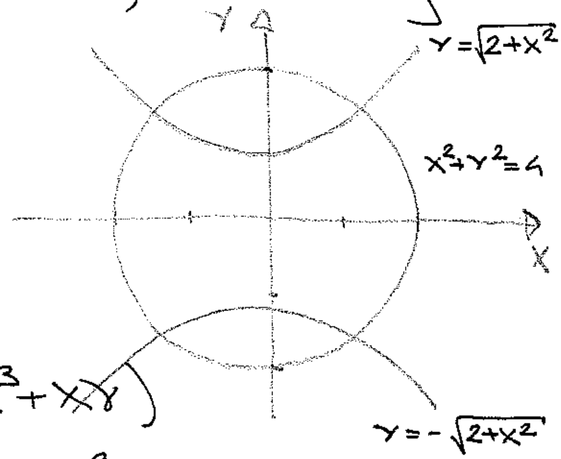
$$= H'(0)\,x + H''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2) = 2\,tg 1 \cdot x + \cancel{\tfrac{8}{2}}\,4\, tg\frac{1}{2} \cdot x^2 + o(x^2)$$

ESERCIZIO 3: Sia 

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \ ; \ y^2+z^2-x^2 \leq 2\}$$

D è ottenuto ruotando attorno l'asse x l'insieme

$$D \cap \{z=0\} = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq 4 \ ; \ y^2-x^2 \leq 2\}$$




Poiché D è unione finita di domini normali regolari si ha che se

$$\vec{F}(x,y,z) = (xz^2+3y \ ; \ 2yz^2+2xz, \ 3z^3+xy)$$

allora

$$I = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu_{ext} \, d\sigma = \iiint_D \underbrace{\operatorname{div} \vec{F}}_{= 12z^2} \, dx\,dy\,dz$$

In coordinate cilindriche con asse la retta $y=z=0$, i.e. $\Phi(x,\rho,\theta) = (x, \rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$, si ottiene che $D = \Phi(D')$ con

$$D' = \{(x,\rho,\theta) : \ |x| \leq 1 \ ; \ \theta \in [0,2\pi] \ ; \ \rho \in [0, \sqrt{2+x^2}\,]\}$$

$$\cup \{(x,\rho,\theta) : \ 1 \leq |x| \leq 2 \ ; \ \theta \in [0,2\pi] \ ; \ \rho \in [0, \sqrt{4-x^2}\,]\}$$

da cui:

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2+x^2}} 12\rho^3 \,\mathrm{sen}^2\theta \, d\rho$$

$$+2\int_1^2 dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-x^2}} 12\rho^3 \,\mathrm{sen}^2\theta \, d\rho = I_1 + I_2$$

da cui:

$$I_1 = 3\pi \int_{-1}^{1} (2+x^2)^{\cancel{\frac{1}{2}}\,2}\, dx = 3\pi \int_{-1}^{1} (x^4+4x^2+4)\, dx$$

$$= 3\pi \left( \frac{2}{5} + \frac{8}{3} + 8 \right) = \frac{166}{5}\pi$$

$$I_2 = 6\pi \int_{1}^{2} (4-x^2)^2\, dx = 6\pi \int_{1}^{2} (x^4 - 8x^2 + 16)\, dx$$

$$= 6\pi \left( \frac{32-1}{5} - \frac{8}{3}(8-1) + 16 \right) = \frac{106}{5}\pi$$

in conclusione:

$$I = \frac{272}{5}\pi$$

ESERCIZIO 4: L'equazione $y-\pi = xy' + e^{y'+2}$ è di Clairaut nella variabile $z = y-\pi$, infatti:

$$z = xz' + e^{z'+2}$$

e quindi rette del tipo $z = px + e^{p+2}$ sono soluzioni.

La curva inviluppo della famiglia di rette si trova che soddisfa: $x + e^{z'+2} = 0$

da cui $x<0$ e $z' = -2 + \ln(-x) \Rightarrow$

$$z(x) = -2x + x(\ln(-x)-1) + c$$
$$= -3x + x\ln(-x) + c$$

Sostituendo nell'equazione:

$$-3x + x\ln(-x) + c = -2x + x\ln(-x) - x \Leftrightarrow c = 0$$

Quindi, la curva è data da

$$z(x) = -3x + x\ln(-x)$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi date da

$$y(x) = \pi + e^{p+2} + px \qquad p \in \mathbb{R}$$
$$y(x) = \pi - 3x + x\ln(-x) \qquad x<0$$

e dalle soluzioni miste che si costruiscono da queste.