ESERCIZIO 1: Sia

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\ ;\ (x-2)^2+(y-2)^2\le 8\right\},$$

l'insieme può essere visto come il sottografico della funzione $z=\sqrt{x^2+y^2}$ che si proietta sul cerchio $(x-2)^2+(y-2)^2\le 8$, $z=0$ e che sta nel semispazio $z\ge 0$.

Da ciò e dalle formule di riduzione:

$$\mathrm{Vol}(D)=\iint_{\{(x-2)^2+(y-2)^2\le 8\}=\{x^2+y^2\le 4(x+y)\}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

passando a coordinate polari:

$$x^2+y^2\le 4(x+y) \iff \rho\le 4(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)=4\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow\ \theta\in -\frac{\pi}{4}+[0,\pi]=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$$

Segue:

$$\mathrm{Vol}(D)=\int_{-\pi/4}^{3/4\pi} d\theta\int_0^{4(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)}\rho^2\,d\rho=\frac{2^{6+\frac{3}{2}}}{3}\int_{-\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{sen}^3\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta$$

$$=\frac{2^{15/2}}{3}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^3 t\,dt \underset{c=\cos t}{=} \frac{2^{15/2}}{3}\int_{-1}^{1}(1-c^2)\,dc$$

$$=\frac{2^{19/2}}{3}-\frac{2^{19/2}}{9}=\frac{2^{23/2}}{9}$$

$$\frac{2^{23/2}}{9}\cdot\bar{z}=\iint_{\{x^2+y^2\le 4(x+y)\}}dx\,dy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz=\frac{1}{2}\iint_{\{x^2+y^2\le 4(x+y)\}}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}d\theta\int_0^{4\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\theta+\frac{\pi}{4})}\rho^3\,d\rho=\frac{1}{8}\cdot 2^{10}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\mathrm{sen}^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta$$

$$=2^7\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^4 t\,dt \underset{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}=\mathrm{sen}^2\theta}{=} 2^7\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos^2(2\theta)}{4}-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta$$

$$= 2^7 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt \right) = 2^7 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt \right)$$

$$= 2^5 \cdot \pi + 2^3 \cdot 2\pi = 48\pi = 2^4 \cdot 3\pi$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{z} = \frac{27}{2^{15/2}} \pi$$

ESERCIZIO 2: Sia

$$D = \left\{ (xyz) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq 16 ; \left(\sqrt{x^2+y^2} - 4\right)^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

D è l'intersezione del toro ottenuto ruotando attorno l'asse z il cerchio $(y-4)^2+z^2 \leq 1$ e della parte di spazio esterna al cilindro $x^2+y^2=16$.

Quindi: $\partial D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, con

$$\Sigma_1 = \left\{ (xyz) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=16 ; -1 \leq z \leq 1 \right\}$$

$$\Sigma_2 = \left\{ (xyz) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq 16 ; \left(\sqrt{x^2+y^2} - 4\right)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

Σ_1 è ottenuta ruotando attorno l'asse z il segmento $\{0\} \times \{4\} \times [-1,1]$, cioè è un tronco di cilindro e quindi è sostegno della superficie regolare (φ_1, D_1) con $D_1 = [0, 2\pi] \times [-1,1]$,
$\varphi_1(\theta, z) = (4\cos\theta, 4\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$.

Σ_2 è ottenuta ruotando la semicirconferenza

$$\begin{cases} (y-4)^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

attorno l'asse z.
∂D è quindi sostegno di una superficie regolare a tratti.
Dalla geometria elementare si trova

$$\text{Area}(\Sigma_1) = 2\pi \cdot 4 \cdot 2 = 16\pi$$

mentre dal Teorema di Guldino segue:

$$\text{Area}(\Sigma_2) = 2\pi \, \ell(\gamma) \cdot \overline{r} = 2\pi \cdot \int_\gamma r \, ds$$

$$\begin{cases} r = 4 + \cos\theta \\ z = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta + 4)\, d\theta = 2\pi (2 + 4\pi)$$

Concludendo:

$$\text{Area}(\partial D) = 16\pi + 4\pi + 8\pi^2 = 20\pi + 8\pi^2.$$

ESERCIZIO 3: La forma $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$

$$\omega(x,y) = \frac{3x^2y^3 + x^5}{x^6+y^6}\,dx + \frac{y^5 - 3x^3y^2}{x^6+y^6}\,dy$$

può essere scritta come somma di una forma chiusa

$$\omega_1(x,y) = \frac{3x^2y^3}{x^6+y^6}\,dx + \frac{-3x^3y^2}{x^6+y^6}\,dy$$

come si verifica con semplici calcoli, e di una forma esatta

$$\omega_2(x,y) = \frac{x^5}{x^6+y^6}\,dx + \frac{y^5}{x^6+y^6}\,dy$$
$$= \frac{1}{6}\cdot d\left(\ln(x^6+y^6)\right).$$

Quindi, per ogni curva chiusa regolare φ risulta

$$\int_\varphi \omega = \int_\varphi \omega_1 .$$

D'altra parte, se $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è una curva regolare chiusa che orienta positivamente

$$\partial D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|^{5/2} + |y|^{5/2} = 1 \right\}$$

e A è un qualsiasi insieme aperto con bordo una curva semplice chiusa regolare con $D \subset A$ si ha:

$$\int_{\partial^+ A} \omega_1 - \int_{\partial^+ D} \omega_1 = \iint_{A \setminus D} \left(\frac{\partial \omega_1^2}{\partial y} - \frac{\partial \omega_1^1}{\partial x} \right) dx\,dy = 0$$

Da cui:

$$\int_{\partial^+ A} \omega_1 = \int_{\partial^+ D} \omega_2 .$$

Se ora $A_r = [-r,r] \times [-r,r]$ (si noti che $D \subseteq [-1,1]\times[-1,1]$) si ottiene:

$$\int_{\partial^+ A_2} \omega_1 = \int_{\partial^+ A_1} \omega_1 = \int_{-1}^{1} \omega_1^1(x,-1)\,dx + \int_{-1}^{1} \omega_1^2(1,y)\,dy$$

$$+ \int_{1}^{-1} \omega_1^1(-x,1)\cdot(-1)\,dx + \int_{1}^{-1} \omega_1^2(-1,-y)\cdot(-1)\,dy$$

ed essendo : $-\omega_1^1(x,-y) = \omega_1^1(+x,y)$

$-\omega_1^2(-x,+y) = \omega_1^2(x,y)$

si conclude

$$\int_{\partial^+ A_1} \omega_1 = 2\int_{-1}^{1} \omega_1^1(x,-1)\,dx + 2\int_{-1}^{1} \omega_1^2(-1,y)\,dy$$

$$= -12\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = -4\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= -4\,\operatorname{atn} t\Big|_{-1}^{1} = -2\pi$$