$\boxed{\text{ESERCIZIO 1:}}$ Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x=0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ①

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+x^\alpha|y|)}{x} & x>0 \\ x+|y| & x<0 \end{cases}$$

con $\alpha>0$. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x=0\})$.
Dal limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

si deduce che

$$\frac{\ln(1+x^2+x^\alpha|y|)}{x} = (x+x^{\alpha-1}|y|)\frac{\ln(1+x^2+x^\alpha|y|)}{x^2+|x^\alpha|y|} = (x+x^{\alpha-1}|y|)(1+o(1))$$

da cui:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{\ln(1+x^2+x^\alpha|y|)}{x} = \begin{cases} 0 & \alpha>1 \\ |y_0| & \alpha=1 \\ \nexists & \alpha\in(0,1) \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} (x+|y|) = |y_0|$$

quindi f è estendibile con continuità in $(0,y_0)$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ se $\alpha=1$, $(0,0)$ se $\alpha>1$.

Indichiamo con F l'estensione di f data da

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & x\neq 0 \\ |y| & x=0 \end{cases}$$

se $\alpha=1$, e

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & x\neq 0 \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

se $\alpha>1$.

Nel primo caso:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x,y_0)-F(0,y_0)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{F(x,y_0)-F(0,y_0)}{x} =$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\ln(1+x^2+x|y|)}{x} - |y_0|}{x} =$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x^2+x|y_0|}{x} - \frac{(x^2+x|y_0|)^2}{2x} - |y_0| + \frac{o((x^2+x|y_0|)^2)}{x}}{x} =$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x+\cancel{|y_0|} - \frac{x}{2}|y_0|^2 - \cancel{|y_0|} + o(x|y_0|+x^2|y_0|+x^4)}{x}$$

$$= 1-\frac{y_0^2}{2}$$

Quindi, F è derivabile parzialmente rispetto x se e solo se $y_0=0$.
D'altra parte, in $(0,0)$ F non è derivabile parzialmente rispetto y essendo $F(0,y)=|y|$.

Infine, per $\alpha \geq 1$ non ha senso porsi il problema della differenziabilità di F in $(0,0)$ essendo $(0,0)$ un punto di frontiera di $\mathrm{Dom}\,F$ ma non un punto interno.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 2:}}$ Sia

$$x^2y'' + xy' - y = \sqrt{x}\ln x + x,$$

l'equazione è definita per $x>0$ e per tali valori si riporta in forma normale, quindi essendo lineare, lo spazio delle soluzioni è del tipo:

$$Ay_1(x) + By_2(x) + y_p(x)$$

con y_1, y_2 soluzioni dell'equazione omogenea associata e y_p soluzione particolare.

Col cambio di variabile $x = e^t$ e ponendo $z(t) = y(e^t)$ l'equazione si riporta ad una equazione lineare a coefficienti costanti:

$$z(t) = y(e^t) \Rightarrow \dot{z} = e^t \cdot y' \Rightarrow \ddot{z} = \dot{z} + e^{2t} \cdot y''$$

da cui:

$$\ddot{z} - \cancel{\dot{z}} + \cancel{\dot{z}} - z = t \cdot e^{t/2} + e^t. \quad ⊛$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 1$$

da cui lo spazio delle soluzioni di tale equazione è

$$Ae^t + Be^{-t} \iff Ax + \frac{B}{x}.$$

Per determinare una soluzione particolare di ⊛ utilizzeremo il metodo degli annichilatori: la funzione $te^{t/2}$ risolve ~~tal~~ l'equazione lineare, omogenea a coefficienti costanti: $\ddot{z} - \dot{z} + \frac{z}{4} = 0$, quindi con polinomio caratteristico $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2$; mentre e^t risolve l'equazione $\dot{z} - z = 0$, cioè di polinomio caratteristico $\lambda - 1$. La radice $\lambda = 1/2$ non compare tra le radici dell'omogenea associata a $\circledast$, mentre $\lambda = 1$ sì.

Si cerca quindi z_p del tipo:

$$z_p(t) = \alpha e^{t/2} + \beta t e^{t/2} + \gamma t e^t$$
$$\dot{z}_p(t) = \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) e^{t/2} + \frac{\beta}{2} t e^{t/2} + \gamma e^t (t+1)$$
$$\ddot{z}_p(t) = \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}\right) e^{t/2} + \frac{\beta}{4} t e^{t/2} + \gamma e^t (t+2)$$

sostituendo:

$$\ddot{z}_p - z_p = t e^{t/2} + e^t \iff$$

$$\left(\frac{\alpha}{4} + \beta - \alpha\right) e^{t/2} + \left(\frac{\beta}{4} - \beta\right) t e^{t/2} + 2\gamma e^t = t e^{t/2} + e^t$$

$$\iff \begin{cases} \beta - \frac{3}{4}\alpha = 0 \\ -\frac{3}{4}\beta = 1 \\ 2\gamma = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -16/9 \\ \beta = -4/3 \\ \gamma = 1/2 \end{cases}$$

da cui lo spazio delle soluzioni di $\circledast$:

$$A e^t + B e^{-t} - \frac{16}{9} e^{t/2} - \frac{4}{3} t e^{t/2} + \frac{t}{2} e^t$$

e quello di ✪:

$$A x + \frac{B}{x} - \frac{16}{9}\sqrt{x} - \frac{4}{3}\sqrt{x}\ln x + \frac{x}{2}\ln x$$

ESERCIZIO 3: Sia

$$f_n(x) = \left(1+(x-n)^2\right)^2 \left(\cos^2\left(\frac{1}{1+(x-n)^2}\right) - 1\right).$$

Ponendo $t_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$, si ha

$$f_n(x) = g(t_n(x))$$

con $g(t) = -\frac{\sin^2 t}{t^2}$ $t \neq 0$ e $g(0) = -1$. Nota che $g \in C^0(\mathbb{R})$.

Poiché $t_n \rightrightarrows 0$ su $(-\infty, R]$, $\forall R > 0$, dalla continuità di g si deduce che $f_n \rightrightarrows -1$ sugli stessi insiemi. La prima affermazione si prova facilmente:

$$x \in (-\infty, R] \Rightarrow x-n \leq R-n < 0 \text{ se } n > R$$
$$\Rightarrow (x-n)^2 \geq (R-n)^2 \Rightarrow t_n(x) \leq t_n(R).$$

Infine, essendo $t_n(x) \gneq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e convergendo a 0 puntualmente si conclude.

Notando che $t_n(n) = 1$ si deduce che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$. Più in generale, se I è illimitato superiormente e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ con $x_n \nearrow +\infty$ si ha: $1 \leq t_{[x_k]}(x_k) \leq 2$, se $k_n \nearrow +\infty$ è tale che $t_{[x_{k_n}]}(x_{k_n}) \longrightarrow \alpha \in [1,2]$ si ha

$$f_{k_n}(x_{k_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(\alpha) \neq -1 \text{ essendo } \alpha \neq 0.$$