

2) Tali punti verificano il sistema $\nabla f = 0$ verificando se ci sono altre soluzioni:

$$\begin{cases} f_x = 2(x^2+y^2-1) \cdot 2x = 0 \\ f_y = 2(x^2+y^2-1) \cdot 4y^3 = 0 \end{cases}$$

Se $x^2+y^2-1 \neq 0$, si ottiene il punto $(0,0)$.

Dato che $(0,0) \in \partial E$, non ci sono punti critici interni oltre a quelli di $E' \cap E$.

Per i punti su ∂E si possono utilizzare i moltiplicatori di Lagrange escludendo $(0,0)$, infatti i punti regolari del vincolo verificano

$$\nabla F(x,y) = (2(x^2+y^2) \cdot 2x - 8x, 2(x^2+y^2) \cdot 2y) \neq (0,0)$$

Il sistema $\nabla F(x,y) = (0,0)$ ha soluzioni $(0,0)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$, gli ultimi due punti non appartengono a ∂E .

Quindi se $(x,y) \in \partial E \setminus \{(0,0)\}$ è un punto di estremo vincolato (per quanto resta finora di sicuro ci sono i punti di massimo assoluto e i punti di $E' \cap \partial E$) verifica per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla F(x,y) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\begin{cases} 4x(x^2+y^2-1) = \lambda \cdot 4x(x^2+y^2-2) \\ 8y^3(x^2+y^2-1) = \lambda \cdot 4y(x^2+y^2) \\ (x,y) \in \partial E \setminus \{(0,0)\} \end{cases}$$