

ESERCIZIO 3: L'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2) \leq z^2, -4 \leq z \leq 1\}$$

risulta la parte di spazio interna ai para-
boloidi $z = x^2 + y^2$, $z = -(x^2 + y^2)$ per $z > 0$, $z < 0$
rispettivamente, e compresa tra i piani $z = -4$
 $z = 1$.

Da cui $D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$, con

$$\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = -4\}$$

$$\Sigma_2 = \{ \text{---} : x^2 + y^2 \leq 4, z = -(x^2 + y^2) \}$$

$$\Sigma_3 = \{ \text{---} : x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 + y^2 \}$$

$$\Sigma_4 = \{ \text{---} : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1 \}$$

Usando il thm della Divergenza si ha che
se $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

$$\int_D \vec{F} \cdot \vec{v}_{\text{ext}} dV = \iiint_D 2(x + y + z) dx dy dz$$

Perché $(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (-x, -y, z) \in D$ si ottiene

$$\int_D \vec{F} \cdot \vec{v}_{\text{ext}} dV = 2 \iiint_D z dx dy dz = 2 \iiint_{D'} z dx dy dz$$
$$D' = \{(x^2 + y^2)^2 \leq z^2, z \in [-4, 1]\}$$

$$= -2 \int_{-4}^1 \pi z^2 dz = -2\pi \cdot (1 + 4^3) = -2 \frac{67}{3} \pi = -42\pi$$

↑
usando la formula di riduzione $D \cap \{z = z_0\}$ è un cerchio di raggio $|z_0|^{\frac{1}{2}}$