

ESERCIZIO 2:

⑤

La curva $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$
data da

$$\gamma(t) = (t^2 e^{-t^2}, t e^{t^2}) = (x(t), y(t))$$

ha un grafico come in
figura data che la fun.
Aione $t \rightarrow t^2 e^{-t^2}$ ha massimo

in $t=1$, con $x(1) = e^{-1}$, ed è infinitesima a $+\infty$.

Invece, $t \rightarrow t e^{t^2}$ è strettamente crescente su
 $[0, +\infty)$.

Usando le formule di Gauss - Green si ha
che

$$\text{Area}(E_n) = \int_{\partial^+ E_n} x dy$$

con $\partial^+ E_n$ data dall'unione dei sostegni delle
curve: $t \in [0, n] \rightarrow \gamma(t)$; $x \in [0, x(n)] \rightarrow (x(n) - x, n)$
 $y \in [0, y(n)] \rightarrow [0, y(n) - y]$.

Adesso

$$\begin{aligned} \text{Area}(E_n) &= \int_0^n x(t) \dot{y}(t) dt + \int_0^{x(n)} (x(n) - x) \cdot 0 dx + \int_0^{y(n)} 0 \cdot (-1) dy \\ &= \int_0^n t^2 e^{-t^2} \cdot e^{t^2} (1 + 2t^2) dt = \int_0^n (t^2 + 2t^4) dt \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{2}{5} n^5 \end{aligned}$$

Infine, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Area}(E_n) = +\infty$.

