

$$z(x) - 4 + \frac{1}{2}(z^2(x) - 16) = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$z^2(x) + 2z(x) = x^2 + 24 \Leftrightarrow (z(x) + 1)^2 = x^2 + 25$$

$$\Leftrightarrow z(x) = \sqrt{x^2 + 25} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\uparrow z(x) = x^2 + y^2(x) \geq 0$$

$$\hookrightarrow y^2(x) = \sqrt{x^2 + 25} - 1 - x^2$$

L'espressione a destra è positiva se

$$\sqrt{x^2 + 25} \geq 1 + x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 24 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{97}{4} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{\sqrt{97} - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{\frac{\sqrt{97} - 1}{2}}$$

In conclusione, per $|x| \leq \sqrt{\frac{\sqrt{97} - 1}{2}}$ la soluzione del Pb di Cauchy è data da

$$y(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{x^2 + 25} - 1 - x^2}$$

Infatti, y non è derivabile in $\pm \sqrt{\frac{\sqrt{97} - 1}{2}}$ e quindi l'intervallo massimale di esistenza è $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{97} - 1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{97} - 1}{2}}\right)$ all'interno del quale y è strettamente positiva e risulta essere l'unica soluzione per il Teorema di Cauchy-Lipschitz.