

ESERCIZIO 3:

(4)

Il triangolo T è descritto come

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq \frac{1}{2}x, y \geq x-2\}$$

e risulta quindi essere un dominio normale rispetto entrambi gli assi.

Applicando le formule di riduzione, nota che T è compatto e $f(x, y) = \frac{(x-y)(2x-4y)}{1+(2x-4y)^4}$ è $C^0(T)$, si può facilmente calcolare l'integrale di f su T .

Procediamo in modo diverso, prendendo

$$\xi = x-y, \quad \eta = 2x-4y$$

e $\Phi(x, y) := (x-y, 2x-4y)$. Poiché Φ è un'applicazione lineare con

$$|\det D\Phi(x, y)| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2$$

Φ è un cambiamento ammissibile di coordinate di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 . Si conclude quindi

$$\iint_{T = \Phi(T')} f(x, y) dx dy = \iint_{T'} f(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) \frac{1}{2} d\xi d\eta = I$$

dove: $\Phi^{-1}(\xi, \eta) = \left(2\xi - \frac{\eta}{2}, \xi - \frac{\eta}{2}\right)$

$$T' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 2 \geq \xi \geq 0, \eta \geq 0, \eta \leq 2\xi\}$$

Da cui:

$$I = \int_0^2 d\xi \int_0^{2\xi} \frac{\xi\eta}{1+\eta^4} \frac{1}{2} d\eta = \frac{1}{4} \int_0^2 \xi \left[\arctan(\eta^2) \right]_0^{2\xi} d\xi$$