

ESERCIZIO 2:

Sia $\varphi(t) = \ln(1+\sqrt{t}) - t - 1$, $t \geq 0$, allora

$$f(x, y) = \varphi(x^2 + 4y^2)$$

Poiché

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2\sqrt{t} - 2t \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{t} \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

si trova che $t=0$ è minimo relativo, $t=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ massimo assoluto.

Quindi: $(0,0)$ è minimo relativo, mentre l'ellisse $x^2 + 4y^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ è luogo di massimi assoluti.

Di ciò ci si può convincere facilmente passando a coordinate ellittiche: $x = \rho \cos \theta$, $y = \frac{1}{2} \rho \sin \theta$ e notando che

$$g(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \frac{1}{2} \rho \sin \theta) = \varphi(\rho^2).$$

Infine, poiché $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi = -\infty$ si conclude

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f = -\infty$$

da cui $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$.