

ESERCIZIO 1

(1)

$$\begin{cases} 2(x + 4yy') = \frac{1}{1+x^2+4y^2} \cdot x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'equazione si riporta per $y \neq 0$ nella forma normale:

$$y' = f(x, y) := \frac{1}{8y} \left[\frac{x}{1+x^2+4y^2} - 2x \right]$$

Poiché

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{8y^2} [\dots] + \frac{1}{8y} \frac{2xy}{(1+x^2+4y^2)^2}$$

si deduce:

$$\sup_K \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < +\infty$$

se $K = [-a, a] \times [1-b, 1+b]$, con $a > 0$, $b \in (0, 1)$.

Quindi, f risulta localmente Lipschitziana in y uniformemente in x , cioè: $\exists L = L(K) > 0$ t.c.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 : (x, y_i) \in K$$

Il Teorema di Cauchy-Lipschitz assicura l'esistenza e unicità locale della soluzione.

Si noti che la soluzione dell'equazione in forma normale ha segno positivo sul suo intervallo di esistenza.

Ponendo $z(x) = x^2 + 4y^2(x)$ si ottiene

$$\begin{cases} 2(x + 4yy') = \frac{x}{1+x^2+4y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = \frac{x}{1+z} \\ z(0) = 4 \end{cases}$$

L'ultima equazione è a variabili separabili, integrandola direttamente si deduce