

2
Su $[1, +\infty)$ si nota che

$$0 \leq f_m(x) \leq (x+1)^m e^{-(x+1)^m} = \varphi((x+1)^m)$$

con $\varphi(t) = t e^{-t}$, con $\sup_{[0, +\infty)} \varphi = \varphi(1) = \frac{1}{e}$

Essendo $(x+1)^m \geq 2^m$ se $x \geq 1$ si conclude che

$$0 \leq f_m(x) \leq 2^m e^{-2^m} \longrightarrow 0$$

Altrimenti, si può cercare direttamente il $\max_{[0, +\infty)} f_m$ (\exists per il teorema di Weierstrass):

$$\begin{aligned} f'_m(x) &= e^{-(x+1)^m} (m x^{m-1} - m (x+1)^{m-1} x^m) \\ &= m x^{m-1} e^{-(x+1)^m} (1 - x(x+1)^{m-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq x(x+1)^{m-1}$$

La funzione a ds è \nearrow , vale zero in $x=0$ e diverge a $+\infty$ a $+\infty$: $\exists! x_m^0$ t.c. $1 = x_m(x_m+1)^{m-1}$.
Inoltre, $x_m \rightarrow 0$ e quindi:

$$f_m(x_m) = x_m^m e^{-(x_m+1)^m} = x_m^m \underbrace{e^{-1/x_m}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{2^m} \quad \uparrow \quad x_m \rightarrow 0$$

da cui: $0 \leq f_m(x) \leq f_m(x_m) \leq 2^{-m}$

Quindi: $f_m \Rightarrow 0$ $[-1+\delta, +\infty)$ $\forall \delta > 0$

Su $(-1, +\infty)$ non si può essere c.u. dato che $f_m \in C^0(\mathbb{R})$ e $f_m(-1)$ non converge.