

ESERCIZIO 1:

$$f_n(x) = x^n e^{-(x+1)^n}$$

(1)

Poiché $x^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x| < 1$, $|x|^n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow |x| > 1$

$$e^{-(x+1)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow (x+1)^n \rightarrow +\infty \\ \Leftrightarrow x+1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$e^{-(x+1)^n} \rightarrow 1 \Leftrightarrow (x+1)^n \rightarrow 0 \\ \Leftrightarrow |x+1| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 0$$

$$e^{-(x+1)^n} \text{ non ha limite se } (x+1)^n \leq -1 \\ \Leftrightarrow x \leq -2$$

si deduce che

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad -1 < x$$

$f_n(x)$ non ha lim, $f_{2k}(x) \rightarrow +\infty$, $f_{2k+1}(x) \rightarrow -\infty$
se $-2 < x < -1$,
 $f_n(x)$ non ha limite, con $f_{2k}(x) \rightarrow 0$ e
 $f_{2k+1}(x) \rightarrow -\infty$ se $x < -2$

$$f_n(-1) = (-1)^n, \quad f_n(-2) = (-2)^n e^{(-1)^n}$$

Quindi:

f_n converge puntualmente se $x > -1$

Per la convergenza uniforme si noti che su $[-1+\delta, 1-\delta]$, $\delta \in (0, 1)$, questa segue da

$$|f_n(x)| \leq |x|^n \leq (1-\delta)^n \\ \uparrow_{x+1 > 0}$$

In realtà, con lo stesso ragionamento si prova la c.u. su $[-1+\delta, 1]$:

$$|f_n(x)| \leq |x|^n e^{-\delta^n} \leq e^{-\delta^n} \rightarrow 0 \\ \uparrow_{x+1 > \delta > 0}$$