

ESERCIZIO 3:

$$f(x,y) = \frac{e^{-xy^2} - 1}{x}$$

④

$\text{Dom } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{e^{-xy^2} - 1}{-xy^2} (-y^2) = -y_0^2$$

quindi:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & x \neq 0 \\ -y^2 & x = 0 \end{cases}$$

risulta $C^0(\mathbb{R}^2)$.

Essendo $F(0,y) = -y^2$, si ha $F_y(0,y) = -2y$.

Invece:

$$\begin{aligned} \frac{F(x,y_0) - F(0,y_0)}{x} &= \frac{e^{-xy_0^2} - 1 + xy_0^2}{x^2} \\ y_0 \neq 0 \Rightarrow &= \frac{\frac{x^2 y_0^4}{2} + o(x^2 y_0^4)}{x^2} \longrightarrow \frac{1}{2} y_0^4 \end{aligned}$$

Se $y_0 = 0$ il rapporto incrementale sopra è identicamente nullo, da cui: $F_x(0,y) = \frac{y^4}{2}$.

F risulta differenziabile in $(0,y_0)$ se:

$$F(x,y) + y_0^2 - \frac{x y_0^4}{2} + 2y_0 (y - y_0) = o(\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2})$$

Se $(x,y) = (0,y)$ il termine a sinistra diventa:

$$\begin{aligned} y_0^2 - y^2 - \cancel{\frac{x y_0^4}{2}} + 2y_0 (y - y_0) &= -y_0^2 - y^2 + 2y y_0 - \cancel{\frac{x y_0^4}{2}} \\ &= -(y - y_0)^2 - \cancel{\frac{x y_0^4}{2}} \\ &= o(\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}) \end{aligned}$$

altrimenti se $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} -\cancel{y^2} + \frac{x y^4}{2} + o(x y^4) + \cancel{y_0^2} - \cancel{\frac{x y_0^4}{2}} + 2y y_0 - \cancel{y_0^2} &= \\ = -(y - y_0)^2 + \frac{x}{2} (y - y_0) (y + y_0) (y^2 + y_0^2) &= \\ = o(\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}) & \end{aligned}$$