

ESERCIZIO 2:

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^{2n}$$

(3)

con

$$a_n = \left(n \int_n^{n+1} \ln \frac{1}{t} dt \right)^n$$

Usando il criterio della Radice si trova:

$$\begin{aligned} a_n^{1/n} &= n \int_n^{n+1} \ln \frac{1}{t} dt = n \int_n^{n+1} \left(t \ln \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{1}{t} dt \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} &\Downarrow \sum_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n \in (n, n+1)} \underbrace{\sum_n \ln \frac{1}{t}}_{\rightarrow 1} \cdot n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Quindi, il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n \geq 1} a_n x^{2n}$ è $R=1$.

Essendo $y=x^2$, la serie di potenze c.u. su $[-1+\delta, 1-\delta]$, $\forall \delta \in (0, 1)$.

Per $x=1$ la serie diverge:

$$\ln \frac{1}{t} \geq \frac{1}{t} - \frac{1}{6t^3} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a_n &\geq \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{12} \left[\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right] \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n \rightarrow e^{-1/2} \end{aligned}$$