

ESERCIZIO 2 Sia  $f_n(x) = (1 + 2^{x^{2n+1}})^n - 1$ , allora  
 $f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  ed

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff n \ln(1 + 2^{x^{2n+1}}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'altra parte,

$$x^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff |x| < 1$$

$$x^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \iff x > 1$$

$$x^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \iff x < -1$$

da cui:

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff x < -1$$

Inoltre, se  $g(t) = (1+t)^n$  si ha

$$f_n(x) = g(2^{x^{2n+1}}) - g(0) = g'(\xi) 2^{x^{2n+1}}$$

con  $\xi = \xi(n, x) \in (0, 2^{x^{2n+1}})$ . Poiché  $g'(t) = n(1+t)^{n-1}$  si ha

$$f_n(x) \leq n (1 + 2^{x^{2n+1}})^{n-1} \cdot 2^{x^{2n+1}}$$

$$\leq n 2^{x^{2n+1}} e^{n \ln(1 + 2^{x^{2n+1}})}$$

$$\leq n 2^{x^{2n+1}} e^{n 2^{x^{2n+1}}}$$

Essendo  $x < -1$  si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot 2^{x^{2n+1}} = 0$  per ogni  $\alpha > 0$ .

Quindi la serie delle  $f_n$  converge puntualmente su  $(-\infty, -1)$ . Inoltre, essendo  $x \mapsto x^{2n+1}$  decrescente su  $(-\infty, -1)$  la serie converge totalmente su  $(-\infty, -1-\delta]$ ,  $\forall \delta > 0$ .