

ESERCIZIO 1 $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{xy=0\} \rightarrow \mathbb{R}$ data da ①

$$f(xy) = \frac{y \sin(xy)}{e^{xy} - 1}$$

si estende con continuità nei punti (x_0, y_0) con $x_0 y_0 = 0$ prendendole uguale a y_0 . Questo segue dal limite notevole $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ e dal fatto che $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} xy = 0$.

Indicando con f la funzione estesa si ha che

$$f(x, 0) = 0 \Rightarrow f_x(x, 0) = 0$$

$$f(0, y) = y \Rightarrow f_y(0, y) = 1$$

Inoltre:

$$\frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \frac{\sin(xy)}{e^{xy} - 1} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$$

da cui $f_y(x, 0) = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} &= \frac{y}{x} \cdot \frac{\sin(xy) - e^{xy} + 1}{e^{xy} - 1} \\ &= \frac{y}{x} \cdot \frac{-\frac{(xy)^2}{2} + o(xy^2)}{e^{xy} - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

Quindi f è differenziabile in un punto del tipo $(x_0, 0)$ e si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - f(x_0, 0) - y}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} &= \frac{y}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} \cdot \frac{\sin(xy) - e^{xy} + 1}{e^{xy} - 1} \\ &= \frac{\cancel{xy}}{\cancel{e^{xy} - 1}} \cdot \frac{-xy^2 + o(xy^2)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (x_0, 0)} 0 \end{aligned}$$