

ESERCIZIO 4. Sia γ la curva semplice di

estremo

$$\begin{cases} z = xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

una sua parametrizzazione è data da $\theta \in [0, 2\pi] \rightarrow (\cos\theta, \sin\theta, \cos\theta\sin\theta)$.

La parametrizzazione data ha l'orientazione cercata.

Il calcolo della circuitazione di

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, (x^2 + y^2)(z + 1))$$

si riduce a $(c = \cos\theta, s = \sin\theta)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{t} \, ds &= \int_0^{2\pi} (c^2, s^2, cs + 1) \cdot (-s, c, c^2 - s^2) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-sc^2 + cs^2 + c^3s + c^2 - cs^3 - s^2) \, d\theta = 0 \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si giunge usando il Teorema di Stokes applicato alla superficie regolare con bordo (φ, D) dove:

$$\varphi(x, y) = (x, y, xy), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Infatti, essendo

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & y^2 & (x^2 + y^2)(z + 1) \end{vmatrix} = (2y(z + 1), -2x(z + 1), 0)$$

si ha: