

ESERCIZIO 3. Sia  $f(x, y) = x(y + y^4)$ , allora per:  
 che  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  il Problema di Cauchy  
 $y' = f(x, y)$ ,  $y(0) = y_0$  ammette unica soluzione  
 locale.

Notando che se  $y_0 = 0$  o  $y_0 = -1$  le rette  $y(x) \equiv 0$   
 e  $y(x) \equiv -1$  sono le rispettive soluzioni, per  
 $y_0 \notin \{-1, 0\}$  si può supporre  $y + y^4 \neq 0$  e  $y \neq 0$ .

L'equazione in questione è un'equazione  
 di Bernoulli, dividendo per  $y^4$  e ponendo  
 $z(x) = \frac{(y(x))^{-3}}{-3}$  si trasforma nell'equazione

$$z' = -3xz + x \Leftrightarrow (ze^{\frac{3}{2}x^2})' = xe^{\frac{3}{2}x^2}$$

$$\Leftrightarrow z(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x^2} + \frac{1}{3}$$

da cui segue:

$$y(x) = \left( (1 + y_0^{-3})e^{-\frac{3}{2}x^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{3}}$$

$y$  è soluzione per  $|x| < \delta$  con  $\delta$  radice di

$$1 = (1 + y_0^{-3})e^{-\frac{3}{2}x^2} \Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}x^2} = 1 + y_0^{-3}$$

Poiché  $x \rightarrow e^{\frac{3}{2}x^2}$  è strettamente crescente su  
 $[0, +\infty)$ , tale equazione ha un'unica radice  
 se e solo se  $1 + y_0^{-3} > 1 \Leftrightarrow y_0 > 0$ .

Quindi:

$y_0 \leq 0 \Rightarrow$  la soluzione è definita  
 su tutto  $\mathbb{R}$

$y_0 > 0 \Rightarrow$  la soluzione è definita  
 su  $\left( -\sqrt{\frac{2}{3} \ln(1 + y_0^{-3})}, \sqrt{\frac{2}{3} \ln(1 + y_0^{-3})} \right)$