CdL in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A

a.a. 2008/2009

Prova scritta, 28 giugno 2010

1. Determinare i valori del parametro $\alpha \in (0, +\infty)$ per cui la funzione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ data da

$$f(x) = \frac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^2 + |x|}$$

può essere estesa con continuità su tutto $\mathbf{R}^2$.

Quindi, studiare la differenziabilità nell'origine di tale estensione.

2. Determinare tutte le funzioni $f \in C^1(\mathbf{R})$ che rendono esatta la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = e^x \ln^2 |y| \, dx + \frac{f(x) \ln |y|}{y} \, dy$$

sul suo dominio. In tali casi, determinarne tutte le primitive.

3. Si consideri il cilindro che ha per direttrice la curva

$$(x^2 + y^2)^3 - 2x^2y^2 = 0$$

e generatrici le parallele all'asse z. Si indichi con Σ la porzione compresa fra i piani $z = 0$ e $z = 2$. Provare che Σ è una superficie regolare e calcolare

$$\int_\Sigma \frac{z}{\sqrt{4 - 6(x^2 + y^2)}} \, d\sigma.$$

4. Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

uscente dal bordo della regione

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, \, x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 4 \right\}.$$