

ESERCIZIO 2 Siano $f \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ e $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) = f(x,y) \cdot \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (2)$$

Provare che \vec{F} è conservativo se e solo se esiste $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ t.c. $f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

Supponiamo che $f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ con $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ e siano $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

Sia $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ una curva regolare t.c. $\gamma(0) = (x_1, y_1)$ $\gamma(1) = (x_2, y_2)$, allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} ds &= \int_0^1 \underbrace{\varphi(|\gamma(t)|) \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \cdot \gamma'(t)}_{\frac{d}{dt} \int_0^{|\gamma(t)|} \varphi(\tilde{s}) d\tilde{s}} dt \\ &= \Phi(|\gamma(1)|) - \Phi(|\gamma(0)|) \\ &= \Phi(\|(x_2, y_2)\|) - \Phi(\|(x_1, y_1)\|) \end{aligned}$$

e quindi \vec{F} risulta conservativo.

Viceversa, se \vec{F} è conservativo siano $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ con $\sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$ e siano $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ t.c. $(x_i, y_i) = (r \cos \theta_i, r \sin \theta_i), i=1,2$.

Sia $\gamma: [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ allora \uparrow sup. $\theta_1 < \theta_2$ per semplicità

$$\int_{\gamma} \vec{F} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r (\cos \theta, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

Se quindi $G \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\})$ è un potenziale di \vec{F} , $G(x_1, y_1) = G(x_2, y_2)$ per punti $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ con $\sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$.