

ESERCIZIO 1: Provare che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{1+\ln^2|x-y|} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

risulta essere di classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$ .

Sia  $\varphi$  la funzione

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+\ln^2|t|} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

si noti che  $f(x, y) = \varphi(x-y)$ .

Proviamo che  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ , in tal caso  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  essendo composizione di funzioni di classe  $C^1$ .

Dal limite notevole  $\lim_{t \rightarrow 0} (\ln|t|) = -\infty$  si deduce la tesi.

Infatti,  $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  ed inoltre poiché

$$|\varphi(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi = \varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi \text{ continua in } t=0.$$

Infine, poiché

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+\ln^2|t|} - \frac{2\ln|t|}{(1+\ln^2|t|)^2}$$

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  si ottiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi' = 0,$$

e quindi  $\varphi$  risulta di classe  $C^1$  in  $t=0$  con  $\varphi'(0)=0$ .