

ESERCIZIO 3 Sia

④

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y=0, 1 \leq x \leq 3, z^2 \leq (x^2 - 4x + 3)^2\}$$

La lamina piana di densità $\rho \equiv 1$ ed \in il rullo, da ottenuto facendo ruotare Σ attorno l'asse z . Per calcolarne il volume si può sfruttare il Teorema di Guldino e quindi basta trovare l'area e distanza del baricentro di Σ dall'asse z .

Per quanto riguarda quest'ultima quantità si noti che Σ è simmetrico rispetto al piano $x=2$ dato che $1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x-2 \leq 1$ ed anche $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$.

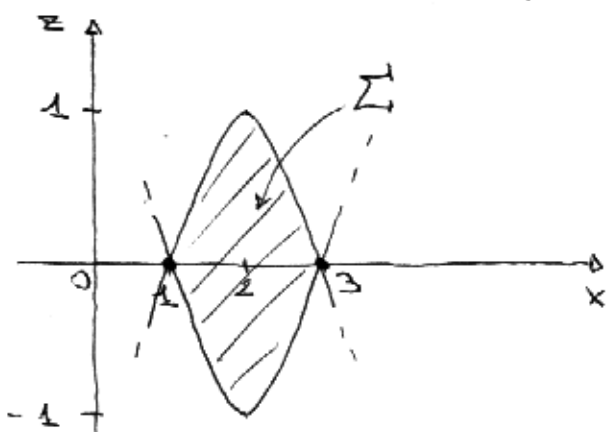
Le coordinate del baricentro di Σ sono quindi $(2, 0, 0)$, essendo Σ simmetrico anche rispetto al piano $z=0$.

Per determinare l'area di Σ si noti che

$$z^2 \leq (x^2 - 4x + 3)^2 \Leftrightarrow$$

$$|z| \leq |x^2 - 4x + 3| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z| \leq x^2 - 4x + 3 & x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \quad x \geq 3 \\ |z| \leq -x^2 + 4x - 3 & x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Quindi

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y=0, 1 \leq x \leq 3, |z| \leq -x^2 + 4x - 3\}$$

da cui usando le Formule di Riduzione si ha