

ESERCIZIO 4: Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - 2(x+y)\}$ (5)

allora

$$\partial E = \underbrace{\{z = x^2 + y^2 \leq 4 - 2(x+y)\}}_{\Sigma_1} \cup \underbrace{\{x^2 + y^2 \leq z = 4 - 2(x+y)\}}_{\Sigma_2}$$

e più precisamente:

$$(x, y, z) \in \Sigma_1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 4 - 2(x+y) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 6 \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in \Sigma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2(x+y) \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 6 \end{cases}$$

Quindi, Σ_1 e Σ_2 sono ~~estremi~~, rispettivamente, delle superfici regolari

$$\Phi_1: \underset{(x,y)}{\mathbb{D}} \longrightarrow (x, y, x^2 + y^2); \quad \Phi_2: \mathbb{D} \longrightarrow (x, y, 4 - 2(x+y))$$

dove $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 6\}$.

Usando il Teorema della Divergenza

$$\int_{\partial E} \vec{F} \cdot \nu_{\text{ext}} dV = \int_E \text{div} \vec{F} dx dy dz$$

calcolando $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2, z^2 - y, x^2 y)$ si ha

$$\text{div} \vec{F}(x, y, z) = 1 - 1 = 0$$

da cui

$$\int_{\partial E} \vec{F} \cdot \nu_{\text{ext}} dV = 0.$$

Inoltre, poiché $\partial E = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ si ottiene

$$\int_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \nu_{\text{ext}} dV = - \int_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \nu_{\text{ext}} dV.$$