

(1)

ESERCIZIO 1:

Sia $(x_0, y_0) \in \{x \cdot y = 0\}$, poiché $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$, si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x,y) = 0.$$

La funzione
$$F(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & (x,y) \text{ t.c. } x \cdot y \neq 0 \\ 0 & (x,y) \text{ t.c. } x \cdot y = 0 \end{cases}$$

risulta quindi di classe $C^0(\mathbb{R}^2)$.

Essendo F simmetrica rispetto la bisettrice del 1° e 3° quadrante, $F(x,y) = F(y,x)$, basta studiare la differenziabilità nei punti dell'asse x .

Per tali punti $F_x(x_0, 0) = 0$ ed inoltre se $x_0 \neq 0$

$$\frac{F(x_0, y) - \overset{0}{F(x_0, 0)}}{y} = \frac{1}{y + \frac{\arctan(x_0 y)}{x_0 y} \cdot \frac{1}{x_0^2 y}}$$

e quindi

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{F(x_0, y) - \overset{0}{F(x_0, 0)}}{y} = 0^\pm \Rightarrow F_y(x_0, 0) = 0$$

Infine, fissato $(x_0, 0) \neq (0, 0)$, F risulta differenziabile in tale punto, infatti:

$$\left| \frac{F(x,y) - \overset{0}{F(x_0, 0)} - \nabla F(x_0, 0) \cdot (x - x_0, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}} \right|$$

$$\leq \frac{|F(x,y)|}{|y|} = \frac{1}{|y| + \left| \frac{\arctan(xy)}{xy} \right| \cdot \frac{1}{x^2 |y|}} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow \overset{0}{(x_0, 0)}} 0$$

si può supporre $y \neq 0$, perché il numeratore dell'espressione precedente è proprio 0

Se poi $x_0 = 0$, i.e. $(x_0, 0) = (0, 0)$, si ha $F_y(0, 0) = 0$ essendo $F(0, y) \equiv 0$ e come sopra si prova la differenziabilità.