

la mappa  $\Phi(u, v) = (u, v(1+u^2))$  è biiunivoca da  $\mathbb{R}^2$  in sé. Infatti  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi(u, v) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v(1+u^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{1+x^2} \end{cases}$$

Inoltre:  $\det \nabla \Phi(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2uv & 1+u^2 \end{vmatrix} = 1+u^2$ ,

quindi  $\Phi$  è un cambiamento ammissibile di coordinate di  $\mathbb{R}^2$  in sé.

Sia  $D' = \Phi^{-1}(D)$ , allora  $u = x \in [0, 3]$  ed inoltre  $1 \leq y \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq v(1+u^2) \leq 4$ . Da cui

$$D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0, 3], 1 \leq \frac{v}{(1+u^2)^{-1}} \leq 4\}.$$

Quindi:

$$\text{Area}(D) = \iint_{\Phi(D)} (1+u^2) du dv = \int_0^3 du \int_{\frac{1}{1+u^2}}^{\frac{4}{1+u^2}} (1+u^2) dv = 9$$

$$x_D = \frac{1}{9} \iint_{\Phi(D)} u(1+u^2) du dv = \frac{1}{9} \int_0^3 u \cdot 3 du = \frac{1}{3} \frac{u^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} y_D &= \frac{1}{9} \iint_{\Phi(D)} v(1+u^2)^2 du dv = \frac{1}{9} \int_0^3 du \int_{\frac{1}{1+u^2}}^{\frac{4}{1+u^2}} v(1+u^2)^2 dv \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 (1+u^2)^2 \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{\frac{1}{1+u^2}}^{\frac{4}{1+u^2}} du = \frac{15}{18} \int_0^3 du = \frac{5}{2} \end{aligned}$$