

ESERCIZIO 2

(2)

La forma $\omega: \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z): (y+1)^2 + z^2 = 0\} \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$

$$\omega(x, y, z) = \ln((y+1)^2 + z^2) dx + \frac{2x(y+1) - z}{(y+1)^2 + z^2} dy + \frac{2zx + y+1}{(y+1)^2 + z^2} dz$$

si può scrivere come

$$d(x \ln((y+1)^2 + z^2)) + \underbrace{\frac{-z}{(y+1)^2 + z^2} dy + \frac{y+1}{(y+1)^2 + z^2} dz}_{\alpha}$$

e quindi non risulta esatta sul suo dominio essendo α la forma "corticina" attorno l'asse $y = -1, z = 0$. Infatti, se $\tilde{\gamma}(\theta) = (0, -1 + \cos \theta, \sin \theta)$ si ha

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \alpha = \int_0^{2\pi} (0 - \sin \theta, \cos \theta) \cdot (0, -\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi.$$

D'altra parte α è esatta su $\mathbb{R}^3 \setminus \{y = -1, z \leq 0\}$ prendendo la curva $\gamma(\theta) = (e^{\cos \theta} \cos \theta, e^{\cos \theta} \sin \theta, e^{\cos \theta} - \frac{1}{2})$ t.c. $\text{Im} \gamma \subseteq \{z \geq \frac{1}{e} - \frac{1}{3} > 0\}$, si ha $\int_{\gamma} \alpha = 0$.

Altrimenti si può procedere per integrazione diretta ottenendo però un integrale piuttosto complicato.