CORSO di LAUREA in FISICA

ANALISI MATEMATICA 2A

Prova Scritta

26 giugno 2008

1. Provare che la funzione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \, xy = 0\} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + \frac{\arctan(xy)}{(xy)^3}}$$

può essere estesa con continuità su tutto $\mathbf{R}^2$. Studiare quindi la differenziabilità dell'estensione continua.

2. Verificare che la forma differenziale $\omega : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \, (y+1)^2+z^2 \neq 0\} \to (\mathbf{R}^3)^*$ definita da

$$\omega(x,y,z) = \ln\Big((y+1)^2 + z^2\Big)\, dx + \frac{2x(y+1) - z}{(y+1)^2 + z^2} dy + \frac{2xz + y + 1}{(y+1)^2 + z^2} dz$$

non risulta esatta sul suo dominio. Quindi integrare ω sulla curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3 \setminus \{(y+1)^2 + z^2 = 0\}$ di equazione $\gamma(\theta) = \Big(e^{\cos\theta}\cos\theta, e^{\cos\theta}\sin\theta, e^{\cos\theta} - \frac{1}{3}\Big)$.

3. Provare che l'applicazione $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$\Phi(u,v) = \Big(u, v(1+u^2)\Big),$$

determina un cambiamento ammissibile di coordinate di $\mathbf{R}^2$ in sé.

Mediante Φ (*e solo mediante* Φ!) calcolare le coordinate del baricentro della lamina piana $D = [0,3] \times [1,4]$ di densità costante $\rho \equiv 1$.

4. Provare che l'insieme

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \, (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\}$$

è sostegno di una superficie regolare e semplice Σ. Quindi, calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{2-z^2}, \frac{x}{2-z^2}, \frac{\sqrt{1-z^2}}{2-z^2}\right)$$

uscente da Σ.