CdL in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A

a.a. 2008/2009

Prova scritta, 14 gennaio 2010

1. Provare che la funzione f definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 3y^2 \sin\left(\dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{x^2}{2} & y \neq 0 \\ \\ \dfrac{x^2}{2} & y = 0. \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbf{R}^2$, studiarne la differenziabilità.

2. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{4x - y}{(x^2+y^2)^\alpha} dx + \frac{x + 4\alpha y}{(x^2+y^2)^\alpha} dy$$

sia chiusa in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Inoltre, per tali valori calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ è il rettangolo di vertici $(1,3)$, $(1,-2)$, $(-2,3)$ $(-2,-2)$ orientato in senso antiorario.

3. Determinare il volume del solido

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{(y-x^2)^2}{4} + \frac{(z-x^2)^2}{25} \leq x^4,\ x \in [-2,2] \right\}.$$

supponendo che la densità sia costante ed uguale ad 1.

4. Provare che il bordo dell'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 \leq (y^2+z^2)^2,\ -1 \leq x \leq 2\}$$

è il supporto di una superficie semplice regolare a tratti. Quindi, calcolare il flusso uscente da D del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x,z,y)\,.$$