CORSO di LAUREA in FISICA

ANALISI MATEMATICA 2A

Prova Scritta

10 luglio 2008

1. Provare che la funzione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \, x = 0\} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}$$

può essere estesa con continuità su tutto $\mathbf{R}^2$. Studiare quindi la differenziabilità dell'estensione continua.

2. Sia $\omega(x,y) = \omega_1(x,y)dx + \omega_2(x,y)dy$ una forma differenziale di classe C^1 su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ivi chiusa e tale che

$$|\omega_1(x,y)|, \, |\omega_2(x,y)| \le \left(x^2 + y^2\right)^{-1/3}$$

in un intorno di $(0,0)$. Provare che ω è esatta su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3. Calcolare il volume del solido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \, z^2 + x^4 + y^4 \le 1\}$$

di densità ρ nel punto (x,y,z) pari al quadrato della distanza dall'asse z.

4. Siano $D = \{(\xi,\eta) \in \mathbf{R}^2 : \, 1 \le |\xi - 3| \vee |\eta - 3| \le 2\}$ e $\varphi(\xi,\eta) = \left(e^{\xi}, e^{\eta}, e^{-(\xi+\eta)}\right)$. Provare che la coppia (φ, D) definisce una superficie regolare semplice e con bordo Σ. Quindi, calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$$

attraverso Σ orientata da φ.