

ESERCIZIO 1

Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$

data da

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}$$

Ricordando il limite notevole $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$

ci riduciamo a studiare il comportamento di $g(x,y) = \frac{x^2 y^\alpha}{x^2+y^2}$ in un intorno di $(0,0)$.

Ricordando che $2/|st| \leq s^2+t^2 \quad \forall s,t \in \mathbb{R}, \quad$

ottenere $(s=x^2, t=y^2)$

$$0 \leq g(x,y) \leq \frac{x^2 y^\alpha}{x^2+y^2} = \frac{y^\alpha}{2} \frac{2x^2 y^\alpha}{x^2+y^2}$$

e quindi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g = 0$ se $\alpha > 1$.

Infine, poiché la disuguaglianza resta valida, se $|s|=|t|$, si

ha

$$g(x,x^2) = \frac{x^{2(\alpha+1)}}{2x^{2(\alpha+1)}} = \frac{1}{2} \begin{cases} +\infty & \alpha < 1 \\ 1 & \alpha = 1 \end{cases}$$

Infine, poiché $g(x,0) = g(0,y) = 0$ si deduce che g è stendibile con continuità in $(0,0)$ con valore 0 se $\alpha > 1$.

Poiché $g(x,0) = g(0,y) = 0$, si ottiene $g(0,0) = 0$ (ovvero si dimostra l'estensibilità con

una con f).

Quindi f risulta differenziabile in $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} = 0$$

Come in precedenza resta studiare il com-

portamento di

$$\frac{x^2 y^\alpha}{x^2+y^2} =: h(x,y).$$