

ESERCIZIO 2 Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$\omega_\alpha(x, y) = \frac{(2\alpha-1)x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{1+\alpha}} dx + \frac{2\alpha xy}{(x^2+y^2)^{1+\alpha}} dy$$

ω_α è di classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \forall \alpha < -1$ e $C^1(\mathbb{R}^2)$ se $\alpha \geq -1$.

Se ω_α è esatta sul suo dominio, è ivi chiusa

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(2\alpha-1)x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{1+\alpha}} \right) = \frac{2y}{(x^2+y^2)^{2+\alpha}} \left(x^2-y^2 + (1+\alpha)(y^2-(2\alpha-1)x^2) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\alpha xy}{(x^2+y^2)^{1+\alpha}} \right) = \frac{2\alpha y}{(x^2+y^2)^{2+\alpha}} (x^2+y^2 - 2x^2(1+\alpha))$$

quindi ω_α chiusa se e solo se

$$y^2(-1 + \overset{0}{1+\alpha} - \alpha) = x^2(\alpha - 2\alpha(1+\alpha) + 1 + (1+\alpha)(2\alpha-1))$$

cioè $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Per integrazione diretta si trova che ω_α è esatta $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ con primitive

$$-\frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha} + \text{cost.}$$