

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 2z\}$$

D è la parte di calotta sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ in
terno al paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$.

$$(x, y, z) \in D \Leftrightarrow z^2 = 4 - (x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq 2z$$

$$\Rightarrow z^2 \geq 4 - 2z \Leftrightarrow (z+1)^2 \geq 5$$

$$\Rightarrow z \geq \sqrt{5} - 1$$

$$\uparrow 2z \geq x^2 + y^2 \Rightarrow z \geq 0$$

In particolare, la sfera ed il paraboloide
si intersecano nella curva:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(\sqrt{5} - 1) \\ z = \sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

Siano

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2(\sqrt{5} - 1)\}$$

$$\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$$

allora $D = \Phi(K)$ e (Φ, K) è una superficie
regolare, semplice, con bordo.

Inoltre,

$$\Phi_x \wedge \Phi_y = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$$

quindi $\Phi_x \wedge \Phi_y$ ha lo stesso verso di (x, y, z)
vettore normale uscente a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nel
punto (x, y, z) .

Utilizzando il Teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(K)} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{\nu}_{\text{ext}} &= \int_{(\Phi(K))^+} \vec{F} \cdot \vec{E} = \\ &\quad \uparrow \text{Se } \rho = (2(\sqrt{5} - 1))^{\frac{1}{2}} \text{ una param. di } (\Phi(K)) \\ &\quad \text{è data da } x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = \sqrt{5} - 1 \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} + \rho^2 \sin^2 \theta + 1; \cos^2 \theta \cdot \rho^2 - \frac{\rho^2}{2} + 2; \rho^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + 3 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \rho (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta \end{aligned}$$