

Ragionando come prima si ottiene

(2)

$$0 \leq h(x,y) \leq \frac{|y|^{\alpha-1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y|^{\alpha-2}$$

e quindi  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h = 0$  se  $\alpha > 2$ .

D'altra parte, passando a coordinate polari si ha

$$H(\rho, \theta) = h(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho^{\alpha-1} \cos^2 \theta |\sin \theta|^\alpha}{\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}$$

e poiché  $\rho^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \geq 2\rho \cos^2 \theta |\sin \theta|$  segue

$$H(\rho, \theta) \leq \frac{\rho^{\alpha-2}}{2} |\sin \theta|^{\alpha-1}$$

con uguaglianza se  $\rho = \frac{|\sin \theta|}{\cos^2 \theta}$ .  
In tal caso,

$$H(\rho(\theta), \theta) = \frac{|\sin \theta|^{2\alpha-3}}{2 \cos^2 \theta}$$

La curva  $(x,y) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$  non è altro che la parabola  $y = x^2$ .

Quindi:  $\alpha \in (1, 3/2]$   $h$  non è differenziabile.

Per  $\alpha \in (3/2, 2]$  si ragiona nel seguente modo che in realtà risolve tutti i casi, anche quelli già presi in esame:

$$\begin{aligned} \sup_{[0, 2\pi]} H &= \rho^{\alpha-1} \sup_{[0, \pi]} \frac{(1-s^2) s^\alpha}{s^2(1-s^2)^2 + s^2} \quad \begin{matrix} t = \sin^2 \theta \\ \downarrow \alpha-1 \\ \int \sup_{t \in [0,1]} \end{matrix} \frac{(1-t)t^{\alpha-1}}{s^2(1-t)^2 + t} \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow \\ \cos^2 \theta, |\sin \theta| \pi\text{-per.} \\ c = \cos \theta, s = \sin \theta \end{matrix} \end{aligned}$$