

ESERCIZIO 3

Sia $\Phi(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}; \frac{y}{x^2+y^2} \right), (x, y) \neq (0, 0)$
 proviamo che Φ è una corrispondenza biunivoca
 di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in sé. (6)

Infatti, dati (x_0, y_0) e (x_1, y_1) t.c. $\Phi(x_0, y_0) = \Phi(x_1, y_1)$
 si ha

$$\frac{1}{x_0^2+y_0^2} = \|\Phi(x_0, y_0)\|^2 = \|\Phi(x_1, y_1)\|^2 = \frac{1}{x_1^2+y_1^2},$$

da cui

$$\Phi(x_0, y_0) = \Phi(x_1, y_1) \Leftrightarrow x_0 = x_1, y_0 = y_1.$$

Sia $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ e si cerca (x, y) t.c. $\Phi(x, y) = (\xi, \eta)$

Si ha

$$\|\Phi(x, y)\|^2 = \frac{1}{x^2+y^2} = \xi^2 + \eta^2$$

quindi

$$\Phi(x, y) = (\xi, \eta) \Leftrightarrow \begin{cases} x(\xi^2 + \eta^2) = \xi \\ y(\xi^2 + \eta^2) = \eta \end{cases}$$

da cui

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

In particolare, si è trovato che $(x, y) = \Phi(\xi, \eta)$,
 cioè $\Phi(\Phi(x, y)) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Inoltre, $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ con

$$J_{\Phi}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2}$$

Quindi Φ è un cambiamento ammissibile di
 coordinate di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in sé.

Sia

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq \sqrt{3}x; \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

si vuole calcolare $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} dx dy$ mediante
 Φ .