

CORSO di LAUREA in FISICA

ANALISI MATEMATICA 2A

Prova Scritta

10 aprile 2008

1. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ per cui la funzione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ data da

$$f(x, y) = \frac{e^{x^2|y|^\alpha} - 1}{x^4 + y^2},$$

può essere estesa con continuità a tutto $\mathbf{R}^2$. Per tali valori studiare la differenziabilità dell'estensione in $(0, 0)$.

2. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ per cui la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{(2\alpha - 1)x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{1+\alpha}} dx + \frac{2\alpha xy}{(x^2 + y^2)^{1+\alpha}} dy$$

risulta esatta sul suo dominio. Per tali valori determinarne le primitive.

3. Provare che l'applicazione $\Phi : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ data da

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

determina un cambiamento ammissibile di coordinate di $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in sé. Mediante Φ calcolare

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x \leq y \leq \sqrt{3}x, 1/4 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Provare che l'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 2z\}$$

è sostegno di una superficie Σ semplice, regolare e con bordo.

Quindi, calcolare il flusso del rotore del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2 - y^2 + 1, x^2 - z^2 + 2, y^2 - x^2 + 3)$$

attraverso Σ orientata secondo la normale esterna alla sfera.