CdL in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A

a.a. 2008/2009

Prova scritta, 8 settembre 2009

1. Sia f la funzione
$$f(x,y) = \frac{(xy)^4}{\sin(x^4+y^4)}.$$
Provare che f è estendibile con continuità nell'origine. Studiare quindi la differenziabilità della funzione estesa in tale punto.

2. Integrare la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \left(ye^{x^2+y^2} + \frac{x^3}{\sqrt[6]{x^4+y^4}}\right)dx + \left(xe^{x^2+y^2} + \frac{y^3}{\sqrt[6]{x^4+y^4}}\right)dy\,,$$
sulla curva $\gamma : [0,\pi/2] \to \mathbf{R}^2$ di equazioni $\gamma(\theta) = (\cos\theta, 3\sin\theta)$.

3. Sia
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\, x^2+y^2 \le 1,\ z \ge 0,\ 1-(|x|+|y|)^2 \le z \le 1-(x^2+y^2)\right\}.$$
Calcolare il volume di D e l'area di ∂D.

4. Provare che l'insieme
$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\, x^2+y^2+z^2 = 4,\ x+y+z \le 1\}$$
è il supporto di una superficie (φ, D) semplice con bordo. Quindi, calcolare la circuitazione del campo
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(z + \frac{x^2}{1+x^3+y^3+z^3}, x + \frac{y^2}{1+x^3+y^3+z^3}, y + \frac{z^2}{1+x^3+y^3+z^3}\right)$$
su $\partial(\varphi(D))$ orientato positivamente.