CdL in FISICA
ANALISI MATEMATICA 2A

a.a. 2007/2008

Prova scritta, 7 luglio 2009

1. Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{x = 0\} \to \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)|x|}{\ln(1 + |x|)}.$$

Provare che f è estendibile con continuità a tutto $\mathbf{R}^2$, quindi studiare la differenziabilità della funzione estesa.

2. Integrare la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{2x(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - 1}dx + \frac{2y(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - 1}dy\,,$$

sulla curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ di equazioni $\gamma(\theta) = (3e^{\sin\theta}\cos\theta, 3e^{\sin\theta}\sin\theta)$.

3. Provare che l'applicazione $\Phi : (0, +\infty)^2 \to (0, +\infty)^2$ data da

$$\Phi(x, y) = (xy, x^\gamma y)\,, \quad \gamma \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$$

determina un sistema di coordinate su $(0, +\infty)^2$ in sé. Mediante Φ calcolare

$$\iint_D x^{2\gamma}y^2 \sin(x^{\gamma+1}y^2)dxdy,$$

dove $D = \{(x, y) \in (0, +\infty)^2 : 1 \le x^{\gamma+1}y^2 \le 4,\ 1 \le x^\gamma y \le 4\}$.

4. Sia Σ la porzione del bordo dell'insieme $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ che giace nel quadrante $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Calcolare il flusso del rotore del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, z^2 + y^3, zy^2)$ attraverso Σ vista come superficie orientata in modo che $\langle \nu_\Sigma, \mathbf{k} \rangle \ge 0$.