

ESERCIZIO 1: $\exists \text{ costato } \alpha \in \mathbb{R}$, tale

(1)

$$a_n = \alpha^n \left(\cos \frac{1}{2^n} - \cos \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} \right) \right).$$

≥ 0 essendo cost $\in [0, \pi/2]$

Usando lo sviluppo di Taylor di $t \mapsto \cos t$ in $t=0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2^n} - \cos \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} \right) &= \cancel{1} - \frac{1}{2 \cdot 4^n} - \cancel{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} \right)^2 + o(16^{-n}) \\ &= \frac{16^{-n}}{2} + 8^{-n} + o(16^{-n}). \end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$|a_n| \rightarrow 0 \iff |\alpha| < 8.$$

Per $\alpha \geq 8$ la serie diverge a $+\infty$, mentre per $\alpha \leq -8$ è indeterminata.

Infine, per $|\alpha| < 8$ la serie converge assolutamente per il Criterio del Confronto Asintotico applicato ad a_n e $b_n = \left(\frac{|\alpha|}{8}\right)^n$.