

$$(C) \begin{cases} y'' + (y')^2 - 2y' + 1 = e^{x-y} \\ y(0) = 0, y'(0) = -2 \end{cases}$$

ammette unica soluzione.

Infatti moltiplicando l'equazione per e^y si ottiene

$$e^y (y'' + (y')^2 - 2y' + 1) = e^x,$$

e ponendo

$$z = e^y \Rightarrow z' = e^y \cdot y' \Rightarrow z'' = e^y ((y')^2 + y'')$$

l'equazione diventa lineare in z :

$$z'' - 2z' + z = e^x.$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione omog. associata è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

$\lambda = 1$ è radice doppia. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z_h(x) = A e^x + B x e^x.$$

Poiché e^x è soluzione di $y' = y$, usando il Metodo degli Annichilatori si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $z_p(x) = K x^2 e^x$. Sostituendo si ottiene $K = \frac{1}{2}$.

Imponendo le condizioni iniziali: $z = z_h + z_p$

$$\begin{cases} z(0) = e^{y(0)} = 1 = A \\ z'(0) = y'(0) e^{y(0)} = -2 = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -3. \end{cases}$$

La soluzione cercata è quindi

$$\begin{aligned} z(x) &= e^x - 3x e^x + \frac{x^2}{2} e^x \\ &= e^x \left(1 - 3x + \frac{x^2}{2} \right). \end{aligned}$$