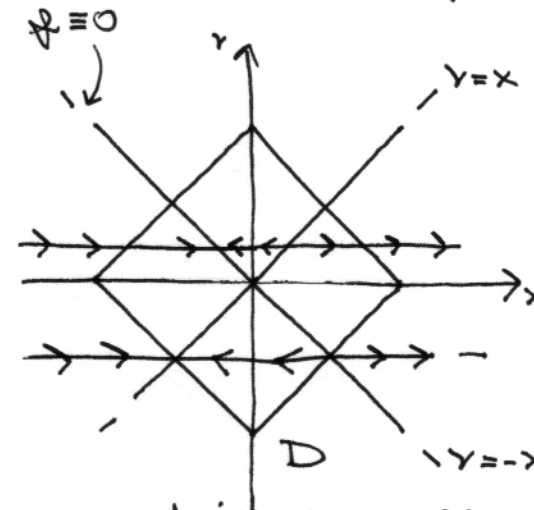


ESERCIZIO 3: La funzione $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 2y^3$ (3)
 è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, poiché $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
 è compatto e ammette max/min su D .
 I punti critici interni a D risolvono

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2 - y^2) = 0 \\ -6y(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y+x=0.$$

 La retta $y+x=0$ è retta di punti critici per f
 con $f(x,-x) = 0$.
 Poiché $f_x(x,y_0) > 0 \Leftrightarrow |y_0| < |x|$
 si vede allora che

$(-y_0, y_0)$	max	$y_0 > 0$
	min	$y_0 < 0$

 rel. re
 $(0,0)$ punto di sella.

 Da ciò si deduce anche che tali punti non possono essere né di max né di min assoluti.
 Cerchiamo quindi max/min assoluti su
 $\partial D = \{|x| + |y| = 1\}$.
 Poiché $f(-x,-y) = -f(x,y)$, studiamo il comportamento di f per $y \geq 0$.
 $\partial D \cap \{y \geq 0\}$ è un vincolo regolare tranne che per $x=0$, i.e. in $(0,1)$. Per tale insieme
 $((\pm 1, 0))$ si può supporre $x+y \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$$\begin{cases} 3(x^2 - y^2) = \lambda \operatorname{sgn} x \\ -6y(x+y) = \lambda \\ y + |x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-y) = -6y \operatorname{sgn} x \\ -6y(x+y) = \lambda \\ y + |x| = 1 \end{cases}$$

 tale sistema non ha soluzione per $x+y \neq 0$.
 Resta quindi solo da verificare il valore di f
 in $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$, da cui $\max_D f = f(0, -1) = 2$, e
 $\min_D f = f(0, 1) = -2$.