

ESERCIZIO 2: Sia $f_n(0) = 0$ e per $x \neq 0$

(2)

$$f_n(x) = \int_1^{x^{2m}} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt.$$

Cambiando variabile ($s = x^{2m}t$) f_n si riscrive per $x \neq 0$ come $\int_{x^{2m}}^{x^{4m}} \frac{\ln(1+s^2)}{s} ds$.

Poiché $\ln(1+s^2) = s^2 + o(s^2)$, $f_n \in C^0(\mathbb{R})$ con $f_n(0) = f_n(1) = f_n(-1) = 0$. L'ultima affermazione si può osservare che l'integrando è dispari. Dal Teorema della Media Integrale segue

$$f_n(x) = \frac{\overbrace{\ln(1+\xi_n^2(x))}^{h(\xi_n(x))}}{\xi_n^2(x)} \cdot \frac{\overbrace{x^{4m} - x^{2m}}^{g_n(x)}}{2} \quad \xi_n(x) \in (x^{2m}, x^{4m}).$$

Quindi, per $|x| \leq 1-\delta$, $\delta \in (0,1)$, $f_n \Rightarrow 0$ poiché

$$|f_n(x)| \leq \max_{[-1,1]} h \cdot (1-\delta)^m.$$

Proviamo che f_n non converge uniformemente su $[-1,1]$. Se infatti $x_n \in (-1,1)$ t.c. $x_n^{2m} = 1/2$, i.e. $x_n = (1/2)^{1/2m}$, allora

$$|f_n(x_n)| \geq \min_{[-1,1]} h \cdot |g_n(x_n)| = (\min_{[-1,1]} h) \cdot \frac{1}{8} > 0.$$

h ha una discontinuità eliminabile in $t=0$, supponiamo quindi h estesa in 0 col valore 1 che la rende continua.

Se invece $|x| > 1$ (si può supporre $x > 1$ essendo f_n pari) si ha:

$$f_n(x) \geq \frac{\ln(1+x^{2m})}{x^{4m}} \cdot \frac{x^{4m} - x^{2m}}{2} = \ln(1+x^{2m}) \cdot \frac{1-x^{-2m}}{2}$$

e quindi $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.