

$$\begin{aligned} \varphi_x \left(x, \pm \frac{\sqrt{x-1}}{x} \right) &= -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{2(x-1)}{x^3} \\ &= \frac{1}{x^3} (2(x-1) - x \ln x) \quad (\neq) \end{aligned} \quad (5)$$

La funzione $\varphi(x) = 2(x-1) - x \ln x$ è definita in $(0, +\infty)$, e $\varphi'(x) = 2 - 1 - \ln x$.

Quindi φ ha massimo assoluto in $x=e$, $\varphi(e) = 2(e-1) - e = e-2 > 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi = -2$.

Esistono quindi due soluzioni dell'equazione $\varphi(x) = 0$. Poiché $\varphi(1) = 0$ e φ è \nearrow su $x \in (0, e)$, l'altra soluzione di tale equazione è $> e$. Indichiamola con α .

Ricapitolando:

$$\nabla \varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in \{y=0\} \cup \left\{ \left(\alpha, \pm \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} \right) \right\}$$

Per determinare la natura dei punti del tipo $(x_0, 0)$ studiamo le sezioni verticali.

$$\chi_{x_0}(y) = \varphi(x_0, y), \quad \chi'_{x_0}(y) = \frac{2y}{1+(xy)^2} [x_0 - 1 - (x_0 y)^2]$$

si noti che $x_0 - 1 - (x_0 y)^2 \geq 0 \Rightarrow x_0 \geq 1$.

Quindi:

$$\chi'_{x_0}(y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } x_0 < 1: & y \leq 0 \\ \text{se } x_0 \geq 1: & y \leq -\frac{\sqrt{x_0-1}}{x_0}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{x_0-1}}{x_0} \end{cases}$$

Quindi si ottiene: