

allora

$$f_m(x) = h\left(\frac{x}{m}\right).$$

(3)

Quindi:

$$\sup_{[R, R] \setminus \{0\}} |f_m - 1| = \sup_{\left[-\frac{R}{m}, \frac{R}{m}\right] \setminus \{0\}} |h - 1|$$

e poiché $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 1$, si ha

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sup_{[R, R] \setminus \{0\}} |f_m - 1| \right) = 0.$$

Infine proviamo che (f_m) non converge uniformemente a 1 sui sottoinsiemi illimitati inf.te e/o sup.te. Sia I un tale insieme e $(x_k) \in I$ t.c. $|x_k| \rightarrow +\infty$ (senza perdita di generalità supponiamo $x_k \rightarrow +\infty$)
La funzione $\xi(x) = \frac{x}{1+x^2}$ prende valori in $[0, 1/2]$ con $\xi(1) = 1/2$.

Per continuità $\exists \delta > 0$: $\xi(x) \geq \frac{1}{4}$ $|x-1| \leq \delta$,
quindi

$$\xi_m(x) = \xi\left(\frac{x}{m}\right) \geq \frac{1}{4} \quad \left| \frac{x}{m} - 1 \right| \leq \delta$$

$$\Leftrightarrow |x - m| \leq m\delta$$

Se $m \geq m_0$ sufficientemente grande $m\delta > 1$,
sia $I_m = [m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$, allora $\bigcup_{m \geq m_0} I_m = [m_0 - \frac{1}{2}, +\infty)$
Quindi, per ogni k sufficientemente grande $x_k \in [m_0 - 1/2, +\infty)$. Inoltre, per tali k
 $\exists ! m_k$ t.c. $x_k \in I_{m_k}$ e quindi

$$f_{m_k}(x_k) = g(\xi_{m_k}(x_k)) \leq \sup_{\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]} g < 1 = \lim_{t \rightarrow 0} g$$
$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} |1 - f_{m_k}| \geq 1 - f_{m_k}(x_k) \geq 1 - \sup_{\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]} g > 0.$$