

ESERCIZIO 3: Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln(1+(xy)^2) & xy \neq 0 \\ -y^2 & x=0 \end{cases} \quad (4)$$

dal limite notevole $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$, si ottiene che $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$. Infatti se $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \underset{(x,y) \rightarrow (x_0,0)}{0} \frac{\ln(1+(xy)^2)}{\underset{(x,y) \rightarrow (x_0,0)}{(xy)^2}} - y^2$$

da cui $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f = -y_0^2 = f(0, y_0)$.

Inoltre, se $(x,y) \in \mathbb{R}^2: y \neq 0$ f è C^1 in (x,y) con:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -\frac{\ln(1+(xy)^2)}{x^2} + \frac{2y^2}{1+(xy)^2} \\ f_y(x,y) = \frac{2xy}{1+(xy)^2} - 2y \end{cases}$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, infatti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f_x = y_0^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f_y = -2y_0 = f_y(0, y_0)$$

Cerchiamo gli estremi relativi di f :

$$f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow y=0 \text{ o } y^2 = \frac{x-1}{x^2} (\geq 0 \Rightarrow x \geq 1)$$

Inoltre: $f_x(x,0) = 0$

quindi $y=0$ è asse di punti critici.

Se invece $(xy)^2 = x-1$ ($\Leftrightarrow y^2 = \frac{x-1}{x^2}$) si ha