

# ESERCIZIO 1

(1)

Siano  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $a_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha \ln n}$ , allora  $a_n > 0$   
 $\forall n \geq 1$ .

Inoltre,  $a_n = \exp\left(n^\alpha \ln n \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)\right)$ ,  
 quindi per i limiti  $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ ,  $\frac{1-\cos t}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$   
 si ottiene:

$$n^\alpha \ln n \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right) = -n^{\alpha-2} \ln n \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

da cui la condizione necessaria per la convergenza della serie,  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , è verificata se e solo se  $\alpha \geq 2$ .

D'altra parte, per (\*) si ha

$$a_n = \underbrace{e^{-n^2 \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{e}} \cdot \underbrace{e^{-n^{\alpha-2} \ln n}}_{\frac{1}{n^{\alpha-2}}}$$

e quindi se  $b_n = \frac{1}{n^{\alpha-2}}$ , si ha  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \sqrt{e}$ .

Poiché, se  $\alpha > 2$ :  $0 \leq b_n \leq \frac{1}{n^2}$

per  $n$  sufficientemente grande, per il Criterio del Confronto la  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

Se  $\alpha = 2$ , invece si ha  $b_n = \frac{1}{n}$ , quindi per il Criterio del Confronto Asintotico  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.