

## ESERCIZIO 2

(2)

Sia  $f_m(x) = \frac{x^2+m^2}{m^2+x^2} \sin\left(\frac{mx}{m^2+x^2}\right)$ , allora  
 $\text{Dom } f_m = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \forall m \geq 1$ .

Si  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :  $\frac{mx}{m^2+x^2} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ , quindi:

$$f(x) := \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1$$

Per studiare la convergenza uniforme di  $(f_m)$  a  $f$  conviene porre  $g_m(x) = \frac{mx}{m^2+x^2}$ .

Si noti che  $g_m \xrightarrow{[R,R]} 0 \quad \forall R > 0$ , dato che

$$|g_m(x)| \leq \frac{m|x|}{m^2+x^2} = \frac{|x|}{m}$$

$\uparrow$   
 $m^2+x^2 \geq m^2$

$$\Rightarrow \sup_{[R,R]} |g_m| \leq \frac{R}{m}$$

Se ora  $g(t) = \frac{\sin t}{t} \quad t \neq 0$ , allora

$$f_m(x) = g(g_m(x))$$

e quindi poiché  $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$  si ottiene

$$f_m \xrightarrow{[R,R] \setminus \{0\}} f$$

La convergenza non è uniforme su  $\mathbb{R}$  dato che

$$f_m(m) = g(1/2).$$

Un altro modo per studiare la convergenza uniforme è notare che se

$$h(t) = \frac{t^2+1}{t} \sin\left(\frac{t}{t^2+1}\right)$$