

Indichiamo sempre con f la funzione estesa ②
 a 0 sulla retta $y=0$ tranne che nell'origine.
 Proviamo che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$.
 Infatti, nei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x \cdot y = 0\}$ basta
 usare il Teorema del Differenziale Totale, per
 i punti $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, invece si usa la defini-
 zione:

$$f(0, y) = 0 \quad \forall y \neq 0 \Rightarrow f_x(0, y) = 0 \quad \forall y \neq 0$$

inoltre

$$f_x(0, y_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0) - \overset{0}{f(0, y_0)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x y_0} - 1}{x^2 y_0^2} = \frac{1}{y_0}$$

Quindi f è differenziabile in $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, e

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} \frac{f(x, y) - \overset{0}{f(0, y_0)} - \frac{x}{y_0}}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Si ha:

$$\begin{aligned} f(x, y) - \frac{x}{y_0} &= f(x, y) - \frac{x}{y} + \frac{x}{y} - \frac{x}{y_0} = \\ &= \frac{e^{xy} - 1 - x^2 y}{x y^2} + x \frac{y_0 - y}{y y_0} = \frac{\frac{x^4 y^2}{2} + o(x^4 y^2)}{x y^2} + \frac{x(y_0 - y)}{y y_0} \\ &= \frac{x^3}{2} + o(x^3) + x \frac{y_0 - y}{y y_0} \end{aligned}$$

segue:

$$\left| \frac{f(x, y) - \frac{x}{y_0}}{\sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}} \right| \leq \frac{\left| \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right|}{\sqrt{x^2}} + \frac{|x| |y_0 - y|}{|y y_0| \sqrt{(y - y_0)^2}} \leq \left| \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right| + \frac{|x|}{|y y_0|}$$

e quindi la tesi.