

ESERCIZIO 1: $f(x, y) = \frac{e^{x^2 y} - 1}{x y^2}$

①

$\text{Dom } f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 0\}$.

Le rette $x=0, y=0$ sono rette di punti di accumulazione di $\text{Dom } f$.

Si noti che $f \in C^\infty(\text{Dom } f)$.

Consideriamo i punti del tipo $(x_0, 0)$, con $x_0 \neq 0$, e proviamo che f non ha limite, infatti:

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} f(x_0, y) = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{x_0^2 y} - 1}{x_0^2 y} \cdot \frac{x_0}{y} = \pm \infty \cdot \text{sgn}(x_0)$$

Se invece anche $x_0 = 0$, cioè studiamo il comportamento nell'origine, basta osservare che f non può avere limite finito altrimenti sarebbe limitata in un intorno di $(0, 0)$, ma questo non è possibile per quanto visto sopra. Altrimenti, si può anche notare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, m x) = \frac{1}{m}$$

Se invece si considerano i punti $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, si ha

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, y_0)} f(x, y) = 0.$$

Infatti:

$$|f(x, y)| = \left| \frac{e^{x^2 y} - 1}{x^2 y} \cdot \frac{x}{y} \right| \leq (1 + \varepsilon) \left| \frac{x}{y} \right|$$

se $(x, y) \in B_\delta((0, y_0))$ essendo $\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$.