

ESERCIZIO 3: Sia γ una curva semplice che (5)
parametrizzata

$$(x^2+y^2)^4 - (x^2-y^2)^2 = 0 \quad (*)$$

Chiamiamo γ del tipo:

$$[0, 2\pi] \ni \theta \rightarrow \gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$$

allora:

$$(\rho(\theta))^8 - (\rho(\theta))^4 \cos^2(2\theta) = 0$$

da cui se $\rho(\theta) \neq 0$:

$$\rho(\theta) = |\cos(2\theta)|^{\frac{1}{2}}$$

Poiché la densità $d(x, y)$ è uguale a $x^2 + y^2$ si ha:

$$\begin{aligned} m &= \iint_{\sum} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} \rho^3 d\rho \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |\cos(2\theta)|^{\frac{1}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Le coordinate del centro di massa invece si trovano senza alcun calcolo.

Infatti, da (*) segue che

$$\sum = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^4 - (x^2 - y^2)^2 \leq 0\}$$

è simmetrica rispetto agli assi coordinati, inoltre essendo anche la densità d , i.e.

$$d(x, y) = d(-x, y) = d(-x, -y) = d(x, -y)$$

si ha che

$$x_{cm} = y_{cm} = 0$$