

ESERCIZIO 4: La parte di spazio  $\mathbb{R}^3$  interna al cono  $C$  è immagine dell'insieme  $[0, 2\pi] \times [0, 1] \times \mathbb{R}$  mediante l'applicazione

$$\mathbb{I}(\theta, \rho, t) = \begin{cases} x = \rho t \cos \theta \\ y = \rho t \sin \theta + (1-t) \\ z = 2(1-t) \end{cases}$$

quindi l'insieme  $\partial S$  cercato è dato da

$$\partial S = \mathbb{I}([0, 2\pi] \times [0, 1] \times \{1\}) \cup$$

$$\mathbb{I}([0, 2\pi] \times \{1\} \times [0, 1]) = S_1 \cup S_2,$$

infatti  $S_1$  è il cerchio  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ , mentre  $S_2$  la superficie del tronco di cono compresa tra i piani  $z = 0, z = 2$ .

Quindi,  $\partial S$  è costituito da una superficie regolare a tratti.

Per calcolare il flusso entrante in  $S$  del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, -x^2 + y^2 + z^2, x^2 - y^2 + z^2)$$

procediamo in due modi:

1° modo: usando la parametrizzazione.

troviamo il vettore normale a  $\partial S$ :

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2)(\theta, t) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \cos \theta & \sin \theta - 1 & -2 \\ -t \sin \theta & t \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2t \cos \theta, 2t \sin \theta, t(1 - \sin \theta)) \end{aligned}$$

È facile convincersi che questo è il vettore normale esterno a  $\partial S$ , ad esempio verificando