

ESERCIZIO 2: Sia $\omega_m: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ (3)

data da

$$\omega_m(x,y) = \frac{y^m}{(x^2+y^2)^{m/2}} dx + \frac{x^m}{(x^2+y^2)^{m/2}} dy$$

Proviamo che ω è esatta per $m=0,3$.

Il caso $m=0$ è banale.

Imponiamo ω_m chiusa, da cui troveremo $m=3$.

Infatti:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^m}{(x^2+y^2)^{m/2}} \right) = \frac{m y^{m-1} (x^2+y^2)^{m/2} - y^m \frac{m}{2} (x^2+y^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot 2y}{(x^2+y^2)^m}$$

$$= \frac{m y^{m-1} \cancel{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}} \cdot \cancel{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}-1}}}{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}+1}} (x^2+y^2 - y^2)$$

$$= \frac{m y^{m-1} x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}+1}}$$

Per simmetria si ha $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^m}{(x^2+y^2)^{m/2}} \right) = \frac{m x^{m-1} y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}+1}}$

cui
da ω_m chiusa $\Leftrightarrow m=3$.

Vediamo ora che ω_3 è esatta: se γ_r indica la circonferenza $[0, 2\pi] \ni \theta \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$ si ha

$$\int_{\gamma_r} \omega_3 = \int_0^{2\pi} (\sin^3 \theta \cdot (-r \sin \theta) + \cos^3 \theta \cdot r \cos \theta) d\theta = 0$$

Se ora γ è una generica curva che "circonda" $(0,0)$ si prende $R > 0$ t.c. il cerchio $\{x^2+y^2 \leq R^2\}$ contiene l'immagine di γ , allora per le formule di Green applicate al dominio della prossima figura si ha: