$\boxed{\text{ESERCIZIO 4}}$ Una parametrizzazione di Σ è data da ⑧

$$\Phi : \{(x,y) \in [0,+\infty)^2 : 4x^2+y^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto \left(x, y, \sqrt{4-(4x^2+y^2)}\right)$$

con

$$\Phi_x \wedge \Phi_y \overset{4x^2+y^2<4}{=} \left(\frac{8x}{(4-4x^2-y^2)^{1/2}}, \frac{2y}{(4-4x^2-y^2)^{1/2}}, 1 \right)$$

e quindi $\Phi_x \wedge \Phi_y$ ha stesso verso e direzione di $(4x,y,z)$ se $(x,y,z) \in \Sigma$.

Sia $\vec{F}(x,y,z) = \left(x(1+y-z^2), y(2+z^2+x), z(-3+2z-y-x) \right)$, per calcolare

$$I = \int_\Sigma \vec{F} \cdot \nu \, d\sigma$$

usiamo il teorema della divergenza applicato alla superficie regolare a tratti e semplice di sostegno $\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ con

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) : x=0, y \geq 0, z \geq 0, y^2+z^2 \leq 4\},$$
$$\Sigma_2 = \{(x,y,z) : x \geq 0, y=0, z \geq 0, 4x^2+z^2 \leq 4\},$$
$$\Sigma_3 = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z=0, 4x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Quindi, se D indica il dominio limitato racchiuso da $\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, poiché

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = 4z$$