

# ESERCIZIO 3

6

Per definizione di  $\Sigma$  si ha che  $\forall z_0 \in [1, 2]$

$$\Sigma \cap \{z = z_0\} = \{(x, y, z) : z = z_0,$$

$$x = \rho(\theta) \cos(\theta + z_0), y = \rho(\theta) \sin(\theta + z_0)\}$$

dove  $\rho(\theta) = (|\cos \theta| + |\sin \theta|)^{-1}$ .

Quindi, la  $\Phi : [0, 2\pi] \times [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è data da

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos(\theta + z) \\ y = \rho(\theta) \sin(\theta + z) \\ z = z \end{cases}$$

si ha  $\Sigma = \Phi([0, 2\pi] \times [1, 2])$ .

$\Phi$  è una superficie regolare a tratti, infatti

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_z \stackrel{\substack{C = \cos(\theta+z) \\ S = \sin(\theta+z)}}{\downarrow} \begin{vmatrix} \dot{\rho} & \ddot{\rho} \\ \dot{\rho}(\theta)C - \rho(\theta)\dot{C} & \dot{\rho}(\theta)S + \rho(\theta)\dot{C} \\ -\rho(\theta)\dot{S} & \rho(\theta)\dot{C} \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\Xi \\ \Upsilon}}{=} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\dot{\rho}S + \rho\dot{C}; \rho\dot{S} - \dot{\rho}C; \rho\dot{\rho})$$

da cui  $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 + (\rho\dot{\rho})^2$

ed essendo

$$\dot{\rho}(\theta) = \frac{(-\sin \theta) \operatorname{sgn}(\cos \theta) + \cos \theta \operatorname{sgn}(\sin \theta)}{(|\cos \theta| + |\sin \theta|)^2}$$

per tutti i  $\theta \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ , si ha

$$\|\Phi_\theta \wedge \Phi_z\|^2 = \frac{3 + 2|\cos \theta||\sin \theta|}{(|\cos \theta| + |\sin \theta|)^6} = \frac{3 + |\sin(2\theta)|}{(|\cos \theta| + |\sin \theta|)^6}$$