Poiché

$$\frac{g(x,y_0)-|y_0|^3}{x} = \frac{x^2+y_0^4-|y_0|^3\sqrt{x^2+y_0^2}}{x\sqrt{x^2+y_0^2}}$$

$$\overset{\sqrt{1+t^2}=1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{=} \frac{x^2-\frac{y_0^2}{2}x^2+o(x^2)}{x\cdot\underbrace{\sqrt{x^2+y_0^2}}_{\neq 0}} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

si ottiene $F_x(0,y_0)=0$ per $y_0\neq 0$.

Per studiare la differenziabilità di F in $(0,y_0)$, $y_0\neq 0$ (nei punti $(x,y)\in Dom f$ segue dal fatto che $f\in C^\infty(Dom f)$) si consideri

$$R(x,y)=\frac{F(x,y)-\overset{|y_0|^3}{\cancel{F(0,y_0)}}-(0,3y_0|y_0|)(x,y-y_0)}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{|y|^3-|y_0|^3-3y_0|y_0|(y-y_0)}{|y-y_0|} & x=0 \\[2ex] \dfrac{h(x)g(x,y)-|y_0|^3-3y_0|y_0|(y-y_0)}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}} & x\neq 0 \end{cases}$$

Quindi nel primo caso il limite per $y\to 0$ è 0 essendo F derivabile rispetto y in $(0,y_0)$. Nell'altro, usando che $h(x)=1+o(x)$ si ha

$$R(x,y)=\frac{g(x,y)-|y_0|^3-3y_0|y_0|(y-y_0)}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}+o(1).$$

Tenendo conto che se $(x,y)\to(0,y_0)$, $y_0\neq 0$, si ha

$$\sqrt{x^2+y^2}=|y|+\frac{x^2}{2|y|}+o(x^2)$$