$\boxed{\text{ESERCIZIO 1:}}$ Sia

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{atn}^2 x}}_{h(x):=} \cdot \underbrace{\frac{x^2+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{g(x,y)=}$$

allora $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$ con $f \in C^\infty(\mathrm{Dom} f)$.
Dagli sviluppi di Taylor di atnt, $\ln(1+t)$ si ottiene

$$h(x) = 1 + \frac{5}{6}x^2 + o(x^3)$$

e quindi

$$f(x,y) = g(x,y) + g(x,y)\cdot o(x). \quad \circledast$$

In particolare, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} g = |y_0|^3.$$

Sia $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in \mathrm{Dom} f \\ |y|^3 & (x,y) \text{ t.c. } x=0 \end{cases}$$

allora $F \in C^0(\mathbb{R}^2)$.
Inoltre, $F_y(0,y) = 3y|y|$, e poiché

$$F(x,0) = h(x)\cdot|x|$$

F non è parzialmente derivabile rispetto x in $(0,0)$.
Se invece si considera $(0,y_0)$ con $y_0 \neq 0$

$$\frac{F(x,y_0)-F(0,y_0)}{x} \overset{x\neq 0}{=} \frac{h(x)g(x,y_0)-|y_0|^3}{x}$$

$$= \underset{1+o(1)}{h(x)}\, \frac{g(x,y_0)-|y_0|^3}{x} + \frac{\overset{o(x)}{(h(x)-1)}}{x}|y_0|^3$$