

CORSO di LAUREA in FISICA

ANALISI MATEMATICA 2A

Prova Scritta

17 settembre 2007

1. Provare che la funzione

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^4) \ln(1 + x^2)}{(\arctan x)^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

può essere estesa con continuità nei punti di accumulazione del suo dominio. Studiare quindi la differenziabilità della funzione estesa.

2. Sia $\omega : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (\mathbf{R}^2)^*$, $\omega(x, y) = \omega_1(x, y)dx + \omega_2(x, y)dy$, di classe C^1 e chiusa per cui

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} \left(\omega_1(x, y) \left/ \frac{-y}{x^2 + y^2} \right. \right) = \lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} \left(\omega_2(x, y) \left/ \frac{x}{x^2 + y^2} \right. \right) = 1.$$

Calcolare l'integrale di ω su una qualsiasi curva regolare semplice e chiusa che circonda l'origine e orientata in senso antiorario.

3. Sia Σ la regione di spazio compresa fra i piani $z = 1$, $z = 2$ e la cui intersezione con il piano $z = z_0$ è data dal quadrato $\{(x, y, z) : z = z_0, |x| + |y| = 1\}$ ruotato in senso antiorario dell'angolo z_0 . Provare che Σ è sostegno di una superficie semplice regolare a tratti.

Inoltre, calcolare

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2} (4(x^2 + y^2) + 2)^{1/2}} d\sigma.$$

4. Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + x(y - z^2); 2y + y(z^2 + x); -3z + z(2z - y - x))$$

attraverso la superficie Σ di sostegno la porzione dell'ellissoide di equazione $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ che sta nell'ottante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ e orientata dal campo $\mathbf{v}(x, y, z) = (4x, y, z)$.