$\boxed{\text{ESERCIZIO 1:}}$ Siano $\alpha \in (-\infty, 0)$ e

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\,\mathrm{atn}(|x|^{-1}|y|^{\alpha}) & x\cdot y \neq 0 \\ \pi & x \cdot y = 0 \end{cases}$$

Poiché $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{atn}\, t = \pi/2$ e $|x||y|^{-\alpha} \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0^+$ se $x_0 \cdot y_0 = 0$ si ha $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f = \pi$.

Se (x_0,y_0) è t.c. $x_0 \cdot y_0 \neq 0$, f è continua, anzi C^∞, in tale punto perché composizione di funzioni continue (C^∞).

Se, invece, $x_0 \cdot y_0 = 0$ si ha:

i) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, essendo $f|_{\{x\cdot y = 0\}} = \pi$

ii) $x_0 \neq 0, y_0 = 0$: $f_x(x_0, 0) = 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y)-\pi}{y} \overset{\mathrm{atn}\, t + \mathrm{atn}(1/t) = \pi/2 \quad t>0}{=} \lim_{y\to 0} -2\,\frac{\mathrm{atn}(|x_0||y|^{-\alpha})}{y} = 0 \iff$$

$$-\alpha > 1 \iff \alpha < -1$$

Se, invece, $\alpha \in [-1, 0)$, tale limite non esiste

iii) $x_0 = 0, y_0 \neq 0$: $f_y(0, y_0) = 0$

Come sopra f non è parzialmente derivabile rispetto la variabile x, e quindi non è differenziabile in tali punti.

Resta da studiare la differenziabilità nei punti $(0,0)$ con $\alpha \in (-\infty, 0)$ qualsiasi, $(x_0, 0)$ per $\alpha \in (-\infty, -1)$.

In entrambi i casi ciò corrisponde a provare che

$$g(x,y) = \frac{f(x,y) - \pi}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}}$$ è infinitesima per (2)

$(x,y) \to (x_0,0)$. Si può supporre $x \cdot y \neq 0$, altrimenti $g(x,y)=0$, quindi:

$$g(x,y) = -\frac{2\,\mathrm{atn}(|x||y|^{-\alpha})}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}}$$

Poiché $\frac{\mathrm{atn}\, t}{t} \xrightarrow{t \to 0} 1$ e $|x||y|^{-\alpha} \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,0)} 0$, studiamo

$$\frac{|x||y|^{-\alpha}}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} = h(x,y)$$

Se $x_0 \neq 0$, essendo $\alpha < -1$ si ha

$$\frac{|x||y|^{-\alpha}}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} \leq |x_0||y|^{\overbrace{-\alpha-1}^{>0}} \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,0)} 0$$

quindi f è differenziabile in $(x_0,0)$ per tali α.

Se $x_0 = 0$, lo stesso ragionamento dà la differenziabilità se $\alpha < -1$, se invece $\alpha \in [-1,0)$ si passa a coordinate polari e si trova

$$h(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\cancel{\rho}}|\cos\theta||\mathrm{sen}\,\theta|^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |h| = \rho^{-\alpha} \cdot \max_{\theta\in[0,2\pi]} |\cos\theta||\mathrm{sen}\,\theta|^{-\alpha} \leq$$

$$\leq \rho^{-\alpha} \xrightarrow{\rho\to 0} 0 \iff -\alpha > 0 \iff \alpha < 0$$

quindi f è differenziabile se e solo se $\alpha < 0$.

ESERCIZIO 2 Siano $k \in \mathbb{N}$ e

$$\omega_k(x,y,z) = \left(\frac{x^3 z + x y^2 z + x^k}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{y^3 z + y^k + y x^2 z}{x^2+y^2}\right)dy + \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)dz.$$

Semplificando e ponendo:

$$\eta(x,y,z) = (xz)\,dx + (yz)\,dy + \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)dz$$

$$\theta_k(x,y,z) = \frac{x^k}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y^k}{x^2+y^2}\,dy$$

si ottiene

$$\omega_k = \eta + \theta_k.$$

Inoltre, $\eta(x,y,z) = d\left(\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) z\right)$, quindi ω_k risulta esatta sse lo è θ_k.
Poiché ω_k e θ_k sono di classe C^1 nel loro dominio, condizione necessaria per l'esattezza è la chiusura:

$$\frac{\partial \theta_k^1}{\partial y} - \frac{\partial \theta_k^2}{\partial x} = -(x^2+y^2)^{-2}\left[x^k \cdot 2y - y^k \cdot 2x\right]$$

e quindi $\frac{\partial \theta_k^1}{\partial y} - \frac{\partial \theta_k^2}{\partial x} = 0$ sse $k = 1$
In tal caso

$$\theta_1 = d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$$

e quindi la famiglia di primitive di ω_1 è data da

$$\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) z + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \text{cost.}$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3:}}$ Sia

$$E = \{(x y z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2 \leq z \leq 1-x^2\}$$

allora

$$x_E = \frac{\iiint_E x \, dx dy dz}{vol(E)},$$

y_E, z_E sono definiti analogamente.
Poiché $(x,y,z) \in E \iff (-x,y,z) \in E \iff (x,-y,z) \in E$ cioè E è simmetrico rispetto ai piani $x=0$, $y=0$, rispettivamente, si ottiene $x_E = y_E = 0$.

Per determinare z_E si osservi che E è un dominio normale rispetto al piano $z=0$ e che la sua proiezione su tale piano è data da

$$x^2+y^2 \leq 1-x^2$$

o meglio

$$\{(x,y,0) : \quad 2x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Dalle Formule di Riduzione:

$$vol(E) = \iiint_E dx dy dz = \iint_{\{(x,y):\ 2x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz =$$

$$= \iint_{\{2x^2+y^2 \leq 1\}} (1-2x^2-y^2) \, dx dy \underset{x = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta}{=}$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (1-\rho^2) \frac{\rho}{\sqrt{2}} \, d\theta \underset{t=\rho^2}{=} \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \int_0^1 (1-t) \, dt$$

e quindi
$$\mathrm{vol}(E) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Analogamente:

$$\iiint_E z\,dx\,dy\,dz = \iint_{\{(x,y):\,2x^2+y^2\le 1\}} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{1-x^2} z\,dz =$$

$$= \iint_{\{2x^2+y^2\le 1\}} \frac{1}{2}\underbrace{\left((1-x^2)^2-(x^2+y^2)^2\right)}_{=(1-2x^2-y^2)(1+y^2)} dx\,dy$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2\sqrt{2}}(1-\rho^2)(1+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{vol}(E) + \left(\int_0^1 \frac{\rho^3}{2\sqrt{2}}(1-\rho^2)\,d\rho\right)\cancel{\left(\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\right)}\ \pi$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{vol}(E) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$$

e quindi
$$z_E = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

ESERCIZIO 4 Sia

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x|+|y|+|z| \leq 2, \ z \geq 0\}$$

allora

$$\partial E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x|+|y| \leq 2, \ z = 0\} \cup$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x|+|y| \leq 2, \ z = 2-(|x|+|y|)\}$$

$$=: G_1 \cup G_2$$

Gli insiemi G_1, G_2 sono sostegno di superfici regolari semplici essendo i grafici delle applicazioni:

$$E_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 2\} \xrightarrow{\varphi_1} (x,y,0)$$

$$E_0 \xrightarrow{\varphi_2} (x,y,2-|x|-|y|)$$

con $\varphi_i \in C^\infty(\overbrace{\{|x|+|y|<2, xy \neq 0\}}^{\tilde{E}_0})$ iniettive e su $\tilde{E}_0$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\operatorname{sgn} x & -\operatorname{sgn} y \end{pmatrix}$$

Se ora $\vec{F}(x,y,z) = (ye^{x+y}, xe^{x+y}, z^2)$, per calcolare

$$\int_{\partial E} \vec{F} \cdot \vec{n}_{ext} \, d\sigma$$

si può procedere o mediante calcolo diretto o usando il Teorema della Divergenza.

Faremo i conti nel primo caso:

$$\int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_{ext}\, d\sigma = \underbrace{-}_{\uparrow}\iint_{E_0} \vec{F}(\varphi_1(x,y)) \cdot (0,0,1)\, dx\,dy \; + $$

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = (\quad , \quad , \quad) \, , \; \vec{n}_{ext}|_{\Sigma_1} = (0,0,-1)$

$$+ \iint_{E_0 \cap \{x>0, y>0\} =: E_0^1} \vec{F}(\varphi_2(x,y)) \cdot (1,1,1)\, dx\,dy =: I_1$$

$$+ \iint_{E_0 \cap \{x>0, y<0\} =: E_0^2} \vec{F}(\varphi_2(x,y)) \cdot (1,-1,1)\, dx\,dy =: I_2$$

$$+ \iint_{E_0 \cap \{x<0, y>0\} =: E_0^3} \vec{F}(\varphi_2(x,y)) \cdot (-1,1,1)\, dx\,dy =: I_3$$

$$+ \iint_{E_0 \cap \{x<0, y<0\} =: E_0^4} \vec{F}(\varphi_2(x,y)) \cdot (-1,-1,1)\, dx\,dy =: I_4$$

dato che $\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)(x,y) = (\operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn} y, 1)$ se $(x,y) \in E_0$.

Esplicitamente:

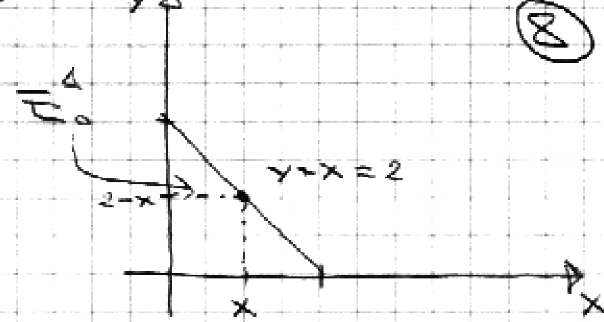
$$I_1 = \iint_{E_0^1} \left[(x+y)\, e^{x+y} + (2-(x+y))^2 \right] dx\,dy$$

$$I_2 = \iint_{E_0^2} \left[(-x+y)\, e^{x+y} + (2-x+y)^2 \right] dx\,dy$$

$$I_3 = \iint_{E_0^3} \left[(+x-y)\, e^{x+y} + (2+x-y)^2 \right] dx\,dy$$

$$I_4 = \iint_{E_0^4} \left[-(x+y)\, e^{x+y} + (2+x+y)^2 \right] dx\,dy$$

$$I_1 = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left[\dots\right] dy =$$



$$= \int_0^2 dx \int_x^2 \left[t e^t + (2-t)^2\right] dt$$

$$= \int_0^2 \left[e^t(t-1) - \frac{(2-t)^3}{3}\right]_x^2 dx =$$

$$= 2e^2 + \int_0^2 \left[\frac{(2-x)^3}{3} - e^x(x-1)\right] dx = 2e^2 - \frac{2}{3}$$

con conti analoghi si trova

$$I_2 = -\frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}e^{-2} + \frac{4}{3}$$

$$I_3 = I_2 \quad \text{(per simmetria)}$$

$$I_4 = -8e^{-2} + \frac{4}{3}$$

da cui

$$\int_\Sigma \vec{F} \cdot \vec{n}_{ext}\, d\sigma = e^2 - 11e^{-2} + \frac{10}{3}$$