CORSO di LAUREA in FISICA

ANALISI MATEMATICA 2A

Prova Scritta

9 gennaio 2008

Coloro che sostengono contemporaneamente le prove scritte di Analisi 2A e 2B svolgano gli esercizi 2 e 4.

1. Provare che per ogni valore del parametro $\alpha \in (-\infty, 0)$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\arctan\left(|x|^{-1}|y|^{\alpha}\right) & xy \neq 0 \\ \\ \pi & xy = 0 \end{cases}$$

risulta continua su $\mathbf{R}^2$, studiarne quindi la differenziabilità.

2. Siano $k \in \mathbf{N}$ e $\omega_k : \mathbf{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \to (\mathbf{R}^3)^*$ la 1-forma differenziale

$$\omega_k(x,y,z) = \left(\frac{x^3 z + xy^2 z + x^k}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{y^3 z + y^k + yx^2 z}{x^2+y^2}\right) dy + \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) dz.$$

Determinare i valori del parametro k per cui ω_k risulta esatta, in tali casi determinarne le primitive.

3. Calcolare il centro di massa del solido occupante la regione di spazio definita da

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2\},$$

supponendo che la densità di massa ρ sia costante ed uguale a 1.

4. Calcolare il flusso del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (ye^{x+y}, xe^{x+y}, z^2)$$

attraverso la superficie semplice e regolare a tratti Σ di sostegno il bordo dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ |x| + |y| + |z| \leq 2, \ z \geq 0\}$$

orientata nel verso della normale uscente a ∂E.