ESERCIZIO 1: Sia

$$f(x,y) = \frac{x^3y - x^2y^2 + xy^3}{\operatorname{sen}(xy)}$$

allora $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.
D'altra parte mettendo in evidenza $x \cdot y$ al numeratore e ricordando il limite notevole $\operatorname{sen} t / t \xrightarrow{t \to 0} 1$ si ottiene per $(x_0, y_0) : x_0 y_0 = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy}{\operatorname{sen}(xy)} \left(x^2 - xy + y^2\right) = x_0^2 + y_0^2 .$$

Indichiamo con $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione estesa di f con $F(x,y) = x^2 + y^2$ se $x \cdot y = 0$, quindi per definizione F risulta $C^0(\mathbb{R}^2)$. Essendo F simmetrica, i.e. $F(x,y) = F(y,x)$, ci limitiamo a studiarne la differenziabilità nei punti del tipo $(x_0, 0)$ (se $x_0 y_0 \neq 0$ la diff.tà segue dal Thm di Differenziabilità di funzioni C^1).

$$F(x,0) = x^2 \Rightarrow F_x(x_0, 0) = 2x_0$$

$$\frac{F(x_0,y) - F(x_0,0)}{y} \overset{x_0 \neq 0}{=} \frac{1}{y}\left(\frac{x_0^3 y}{\operatorname{sen}(x_0 y)} - x_0^2\right) - x_0 + o(1)$$

$$= \frac{x_0^2}{y} \; \frac{\cancel{x_0 y} - \cancel{x_0 y} + \frac{(x_0 y)^3}{6} + o(y^3)}{\operatorname{sen}(x_0 y)} - x_0 + o(1)$$

da cui $F_y(x_0, 0) = -x_0$ se $x_0 \neq 0$.
Se $x_0 = 0$ si verifica che $F_y(0,0) = 0$, quindi in tutti i casi

$$F_y(x_0, 0) = -x_0 .$$