Per studiare la differenziabilità di F in $(x_0, 0)$ si deve provare che

$$R(x,y) := F(x,y) - F(x_0,0) - (2x_0, -x_0) \cdot (x - x_0, y)$$

è $o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}\right)$.

D'altra parte, se (x,y) è t.c. $x \cdot y \neq 0$

$$R(x,y) = \frac{xy}{\operatorname{sen}(xy)}\left(x^2 - xy + y^2\right) - x_0^2 - 2x_0(x - x_0) + x_0 y$$

$$= \left(1 + o(xy)\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) - x_0^2 - 2x_0(x - x_0) + x_0 y$$

$$= (x - x_0)^2 + (x_0 - x)y + y^2 + o(xy)$$

dato che $x^2 - xy + y^2 \xrightarrow{(x,y) \to (x_0,0)} x_0^2$.

Quindi, poiché $o(xy) = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}\right)$ si ha $R(x,y) = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}\right)$.

Infine, se $x \cdot y = 0$

$$R(x,y) = x^2 + y^2 - \cancel{x_0^2} - 2xx_0 + \cancel{2}x_0^2 + x_0 y$$

$$= (x - x_0)^2 + y^2 + x_0 y$$

da cui o $x_0 = 0$ o $x_0 \neq 0$ e $y = 0$ (visto che $(x,y) \to (x_0, 0)$).

Nel primo caso $R(x,y) \overset{x_0=0}{=} x^2 + y^2 = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, nel secondo $R(x,y) = (x - x_0)^2 = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}\right)$.