CORSO di LAUREA in FISICA ANALISI MATEMATICA 2A

Prova Scritta

3 settembre 2007

1. Provare che la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3y - x^2y^2 + xy^3}{\sin(xy)}$$

può essere estesa con continuità nei punti (x, y) per cui $xy = 0$. Studiare quindi la differenziabilità della funzione estesa.

2. Integrare la forma differenziale $\omega : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y^2 + z^2 \neq 0\} \rightarrow (\mathbf{R}^3)^*$

$$\omega(x, y, z) = \cosh^3(xy)dx + \frac{6y^5 - 3y^2z^2}{y^6 + z^4}dy + \frac{2y^3z + 4z^3}{y^6 + z^4}dz$$

sulla curva semplice di sostegno $x = 2, y^2 + z^2 = 1$ orientata in senso orario come visto da un osservatore posto nell'origine.

3. Calcolare il volume della regione di spazio interna ai cilindri di direttrici le curve $4x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$, $4(x - 4)^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$ e generatrici parallele a $(1, 0, 1)$, $(-1, 0, 1)$ rispettivamente.

4. Verificare che l'applicazione

$$\Psi(x, y) = \left(y - \frac{x}{2}, \frac{y}{x} \right)$$

è una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > x/2\}, \quad \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 : \xi > 0, \eta > 1/2\}.$$

Sia Φ la trasformazione inversa, provare che Φ è un cambiamento ammissibile di coordinate fra gli stessi insiemi e mediante tale applicazione si calcoli

$$\iint_T \cos\left(\frac{\pi x}{2y - x}\right) dx dy,$$

dove $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq y \leq 3x, 1 \leq y - x/2 \leq 3/2\}$.